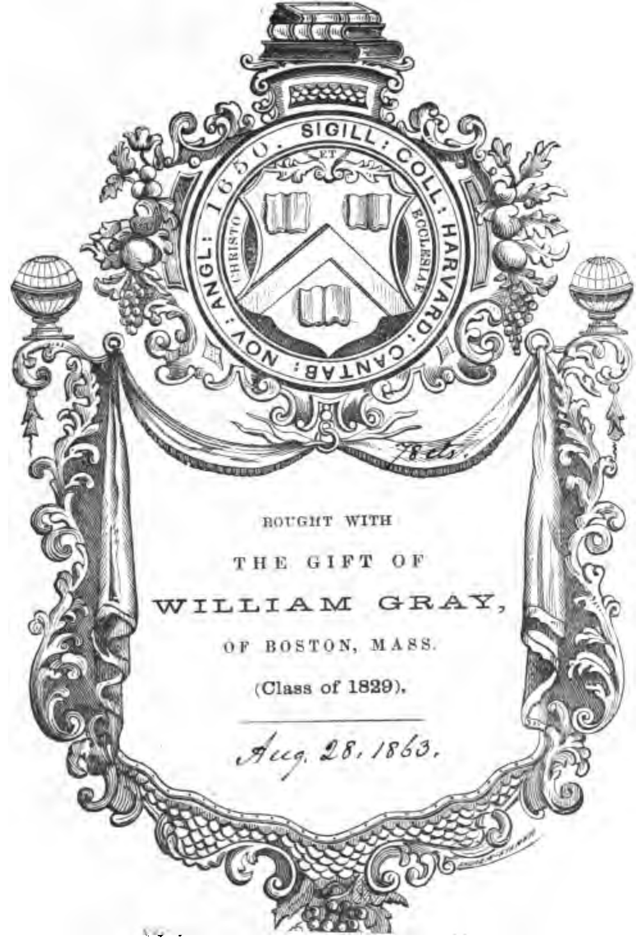
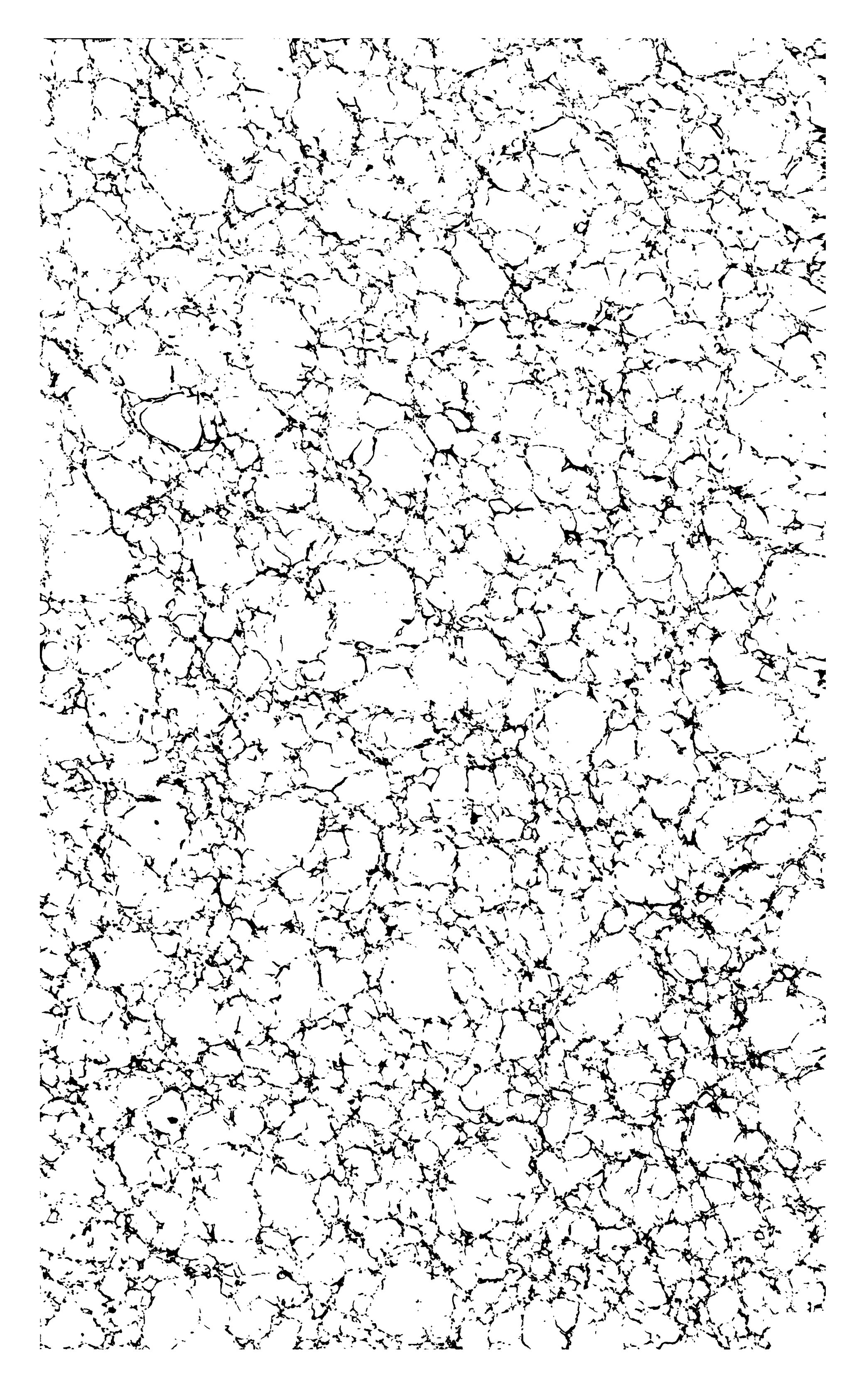
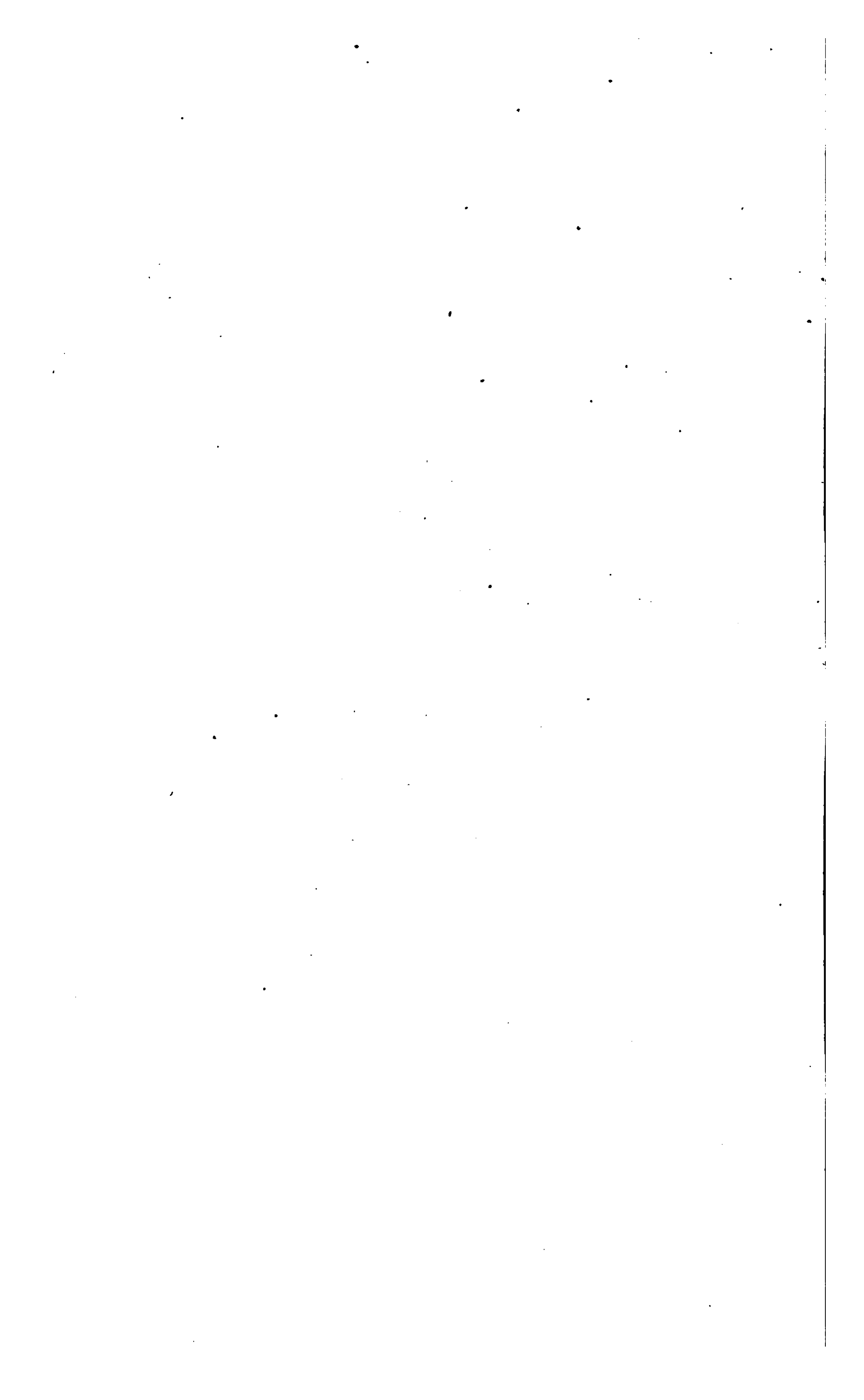
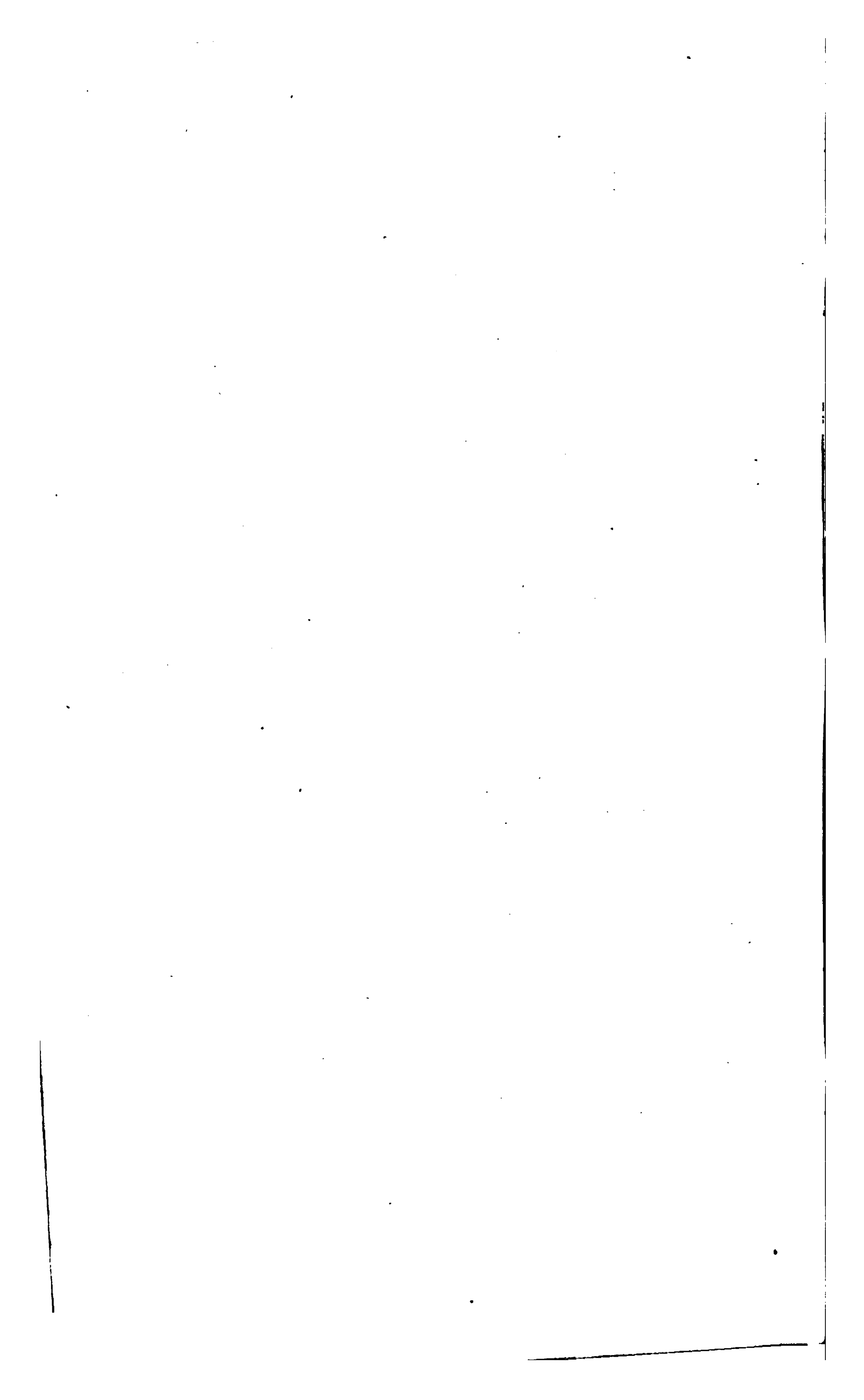



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE GIFT OF
WILLIAM GRAY,
OF BOSTON, MASS.
(Class of 1829).
Aug. 28, 1863.







Maxima und Minima.

Maxima und Minima.

Ein geometrisches und algebraisches Uebungsbuch

für die Schüler höherer Lehranstalten.

Von

H. C. E. Martus,

ord. Lehrer der Mathematik und Physik an der Königstädtischen Realschule in Berlin.

Mit einer Figurentafel.

Berlin, 1861.

Verlag von Th. Chr. Fr. Enslin.

(Adolph Enslin.)

Vorrede.

Das lebhafte Interesse, welches die Schüler an der Bestimmung geometrischer Maxima und Minima nehmen, rührt her von der überraschenden Einfachheit der Resultate und von den besonderen Eigenschaften der größten und kleinsten Figuren. Es zieht dies um so mehr an, wenn man nach einer planimetrischen Aufgabe sogleich die entsprechende stereometrische behandelt, überhaupt die Aufgabe erweitert auf die verwandten Gebilde. So hat es, wie man aus der Anordnung ersehen wird, oft keine Schwierigkeit, eine Aufgabe über Kreis und Kugel auf Ellipse und Ellipsoid überzuführen; es gehört dabei zur Lösung weiter gar nichts, als daß man weiß, wie die Gleichung der Ellipse für den Mittelpunkt als Coordinatenanfang lautet. Erst in dem „Kegelschnitte“ überschriebenen Abschnitte sind noch einige andere Kenntnisse, wie Gleichung der Tangente, erforderlich. — Für den Unterricht gewähren diese Aufgaben, außer der Repetition namentlich der Lehren der Stereometrie, bei ihrer Behandlung mit Hülfe der Rechnung noch eine treffliche Uebung im Umformen und Lösen der Gleichungen (die Aufgaben, welche auf kubische und transscendente Glei-

Inhaltsangabe.

Erster Theil.

Geometrische Lösung.

---

§. 1. Erklärung.

Fällt man von sämmtlichen Punkten einer Kreisperipherie (Fig. 1.) Perpendikel auf eine außerhalb des Kreises gegebene Linie LN, und theilt durch irgend eine ihr parallel laufende Sehne, z. B. durch den Durchmesser AC, die Peripherie in zwei Bogen, so bemerkt man, daß, wenn der Ausgangspunkt A der Perpendikel den von der Linie LN entfernteren Bogen durchläuft, also nach E, F, ... hin, die Perpendikel größer werden; daß sie bei G und H sich wieder verkleinern; daß folglich an einer Stelle der Perpendikel am größten gewesen sein muß, nämlich da, wo er durch den Mittelpunkt M hindurch ging. Läßt man ferner den Ausgangspunkt der Perpendikel auf den andern zwischen AC und LN liegenden Bogen hinübertreten, und von C in der Richtung J, K... sich bewegen, so vermindert sich die Größe der Perpendikel bis sie bei O, P.... wieder zunimmt. Es muß daher zwischen JK und OP einen Punkt geben, von welchem der kleinste Perpendikel herkommt.

Nach diesen Betrachtungen wird folgende Erklärung verständlich sein.

Erklärung. Wenn eine geometrische Figur, also eine Linie, eine Fläche oder ein Körper, zwischen irgend zwei Gren-

Inhaltsangabe.

Erster Theil.

Geometrische Lösung.

---

§. 1. Erklärung.

Fällt man von sämmtlichen Punkten einer Kreisperipherie (Fig. 1.) Perpendikel auf eine außerhalb des Kreises gegebene Linie LN, und theilt durch irgend eine ihr parallel laufende Sehne, z. B. durch den Durchmesser AC, die Peripherie in zwei Bogen, so bemerkt man, daß, wenn der Ausgangspunkt A der Perpendikel den von der Linie LN entfernteren Bogen durchläuft, also nach E, F, ... hin, die Perpendikel größer werden; daß sie bei G und H sich wieder verkleinern; daß folglich an einer Stelle der Perpendikel am größten gewesen sein muß, nämlich da, wo er durch den Mittelpunkt M hindurch ging. Läßt man ferner den Ausgangspunkt der Perpendikel auf den andern zwischen AC und LN liegenden Bogen hinübertreten, und von C in der Richtung J, K... sich bewegen, so vermindert sich die Größe der Perpendikel bis sie bei O, P.... wieder zunimmt. Es muß daher zwischen JK und OP einen Punkt geben, von welchem der kleinste Perpendikel herkommt.

Nach diesen Betrachtungen wird folgende Erklärung verständlich sein.

Erklärung. Wenn eine geometrische Figur, also eine Linie, eine Fläche oder ein Körper, zwischen irgend zwei Gren-

Erläuterung. P sei der innerhalb des Winkels ABC (Fig. 3.) gegebene Punkt. Ist nun DE eine Linie, welche von der Ebene des Winkels ein Dreieck DEB abschneidet, dessen Umfang betrachtet werden soll, so lasse man den Punkt D nach dem Scheitel zu heranrücken (OQ, GH, ...). Dann sieht man, wie die Spitze E des Dreiecks in dem Schenkel BA hinaufläuft, und daß der Umfang sich immer mehr vergrößert; bis er, wenn die Linie in die mit BA parallel laufende Gerade JP übergeht, unendlich groß wird. Läßt man D nach der andern Richtung in dem Schenkel BC dahineilen, so wird der Umfang zum zweiten Mal unendlich, wenn D sich im Unendlichen befindet, und die abschneidende Linie die mit BC parallele Richtung KP angenommen hat. An einer Stelle muß also der Umfang des abgeschnittenen Dreiecks am kleinsten gewesen sein.

Analysis. Beschreibt man für das Dreieck BDE denjenigen Kreis (um F), welcher die Seite DE selbst, die beiden andern aber in ihren Verlängerungen, DL und EN, berührt, so ist der Umfang des Dreiecks

$$RE + EB + BD + DR = BN + BL = 2\,BL.$$

Er wird daher dann ein Minimum sein, wenn die Tangente BL möglichst klein ist. Dazu muß der Kreis so weit, wie möglich, sich dem Scheitel nähern. Er kann aber nicht weiter vorrücken, als bis er durch den gegebenen Punkt P geht; denn für Dreiecke, wie BGH erhält man als äußere Berührungskreise dieselben, wie vorhin. Der Kreis weicht um so mehr zurück, je weiter der Eckpunkt des Dreiecks von O über G nach J vorschreitet.

Construction. Man fälle vom gegebenen Punkte P einen Perpendikel auf die Halbirungslinie des Winkels und verlängere ihn um sich selbst, bis S, und dann bis zum Durchschnitt mit einem Schenkel, BC, in T; suche zwischen TP und TS die mittlere Proportionale; trage sie von T aus auf dem Schenkel BC, doch nicht nach dem Scheitel B hin (weil sonst

der Kreis in das Dreieck kommen würde), sondern in der Verlängerung nach C ab, TU; errichte in dem erhaltenen Punkte U ein Loth bis zur Halbirungslinie BF: so ist M der Mittelpunkt des gewünschten kleinsten Kreises, welcher die Schenkel des Winkels ABC berührt und durch P geht. Legt man an diesen im Punkte P eine Tangente, OQ, so schneidet dieselbe von dem Winkel das Dreieck mit dem kleinsten Umfange ab.

Der Beweis ist nun ganz kurz.

§. 3. Aufgaben.

1. Auf einer unbegrenzten graden Linie den Punkt der kürzesten Entfernung zu zwei gegebenen, auf derselben Seite der Linie liegenden Punkten zu finden.

Erläuterung. A und B (Fig. 4.) seien die oberhalb der Linie LN gegebenen Punkte. Es ist klar, daß es solchen Punkt in der nach beiden Seiten unendlichen Linie LN geben muß, bei welchem die Summe der Abstände von A und B am kleinsten ist.

Construktion. Von einem der Punkte, A, fälle man ein Loth, AC, auf LN, verlängere es um sich selbst und verbinde den Endpunkt D mit B, so schneidet diese Linie die gegebene in dem gesuchten Punkte X.

Beweis. Daß AX + XB kleiner ist, als irgend eine andere Entfernung, z. B. AF + FB, ergiebt sich aus den Seiten des Dreiecks DFB, wenn man congruente Dreiecke benutzt.

Anmerkung. Der Punkt der kürzesten Entfernung ist derjenige, bei welchem die beiden Abstände, XA und XB, mit der Linie LN gleiche Winkel bilden. — Den kürzesten Weg nimmt ein Lichtstrahl, welcher vom leuchtenden Punkte A zur spiegelnden Linie LN und dann zum Punkte B gelangt.

2. In ein Quadrat ein Viereck mit dem kleinsten Umfange einzuschreiben, so daß eine Ecke desselben in einen auf einer Seite gegebenen Punkt fällt.

§. 5.

1. Eine gegebene Linie in zwei Stücke zu theilen, daß die Summe der Quadrate derselben ein Minimum werde.

Auflösung. Verfolgt man den Theilpunkt C, wie er von dem einen Ende der Linie AB bis zum andern hinläuft, so kann man durch die Figur leicht zeigen, daß ein Minimum existirt.

Durch Auflösung von

$$AB^2 = (AC + CB)^2$$

erhält man

$$AC^2 + CB^2 = AB^2 - 2\,AC \cdot CB.$$

Letzteres wird ein Minimum, wenn $AC \cdot CB$ ein Maximum ist, was (nach §. 4. Nr. 2.) für die Mitte der Fall ist.

Hülfssatz. Schneidet man von einer Dreiecksseite die Hälfte ab, und verbindet den Theilpunkt mit der gegenüberliegenden Spitze, so ist die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten gleich dem doppelten Quadrate des abgeschnittenen Theiles, vermehrt um das doppelte Quadrat der Verbindungslinie. (Fig. 7.)

I. Thesis. $BF^2 + FA^2 = 2\,AC^2 + 2\,CF^2$.

Beweis. Nach dem erweiterten Pythagoräischen Lehrsatze ist

$$BF^2 = BC^2 + CF^2 - 2\,BC \cdot CE$$
$$AF^2 = AC^2 + CF^2 + 2\,AC \cdot CE,$$

woraus, da $BC = AC$, durch Addition die Behauptung sich ergiebt.

2. Auf einer graden Linie den Punkt zu bestimmen, für welchen die Summe der Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten ein Minimum ist.

Analysis. Man verbinde den Punkt X der Linie LN, für welchen die Quadrate der Abstände $XA^2 + XB^2$ die

kleinste Summe ergeben mögen, mit dem Halbirungspunkte C von AB; dann ist nach Gleichung I

$$XA^2 + XB^2 = 2\,AC^2 + 2\,XC^2$$

Es muß also auch die rechts stehende Summe ein Minimum werden, was eintritt, wenn XC ein Perpendikel auf LN ist.

Hülfssatz. Schneidet man von der Grundlinie eines Dreiecks aus auf einer Nebenseite ein Drittel ab, und verbindet den Theilpunkt mit der gegenüberliegenden Spitze, so ist das Quadrat der andern Nebenseite, vermehrt um das doppelte Quadrat der Grundlinie, gleich dem sechsfachen Quadrate des abgeschnittenen Drittels und dem dreifachen Quadrate der Verbindungslinie. (Fig. 7.)

II. Thes. $BF^2 + 2FA^2 = 2 \cdot 3\,AD^2 + 3\,DF^2$

Der Beweis ist wie der der Gleichung I; man muß nur die aus dem Dreiecke ADF erhaltene Gleichung doppelt nehmen.

3. Lehrsatz. Derjenige Punkt, für welchen die Quadrate der Entfernungen von drei gegebenen Punkten die kleinste Summe ergeben, ist der Schwerpunkt des durch die drei Punkte bestimmten Dreiecks.

Beweis. Ist Z (Fig. 8.) irgend ein anderer Punkt, so verbinde man ihn auch mit dem Schwerpunkte S des Dreiecks ABC und mit dem Halbirungspunkte D einer Seite. Dann ist nach Gleichung I für das Dreieck ZAB

$$BZ^2 + ZA^2 = 2\,AD^2 + 2\,DZ^2$$

und nach Gleichung II für die dritte Entfernung CZ

$$CZ^2 + 2\,ZD^2 = 2 \cdot 3\,DS^2 + 3\,SZ^2$$

durch Addition dieser Gleichungen erhält man

$$ZA^2 + ZB^2 + ZC^2 = 2\,AD^2 + 2 \cdot 3\,DS^2 + 3\,SZ^2$$

Diese Gleichung lehrt: 1) daß die Summe der Quadrate der Entfernungen von A, B, C dieselbe Größe behält für alle Punkte, welche auf der Peripherie eines mit SZ um S be-

schriebenen Kreises liegen; und 2) daß sie am kleinsten ist, wenn SZ ganz verschwindet.

Zusatz. Man erhält also diesen Punkt, wenn man den Punkt der kleinsten Summe der Quadrate der Entfernungen von den beiden ersten Punkten mit dem dritten verbindet, und ein Drittel dieser Linie abschneidet.

Hülfssatz. Schneidet man ebenso von der Dreiecksseite ein Viertel ab, so ist

III. Thes. $BF^2 + 3FA^2 = 3 \cdot 4\, AD^2 + 4DF^2$.

4. Aufgabe. Den Punkt zu suchen, für welchen die Summe der Quadrate der Entfernungen von vier gegebenen Punkten ein Minimum ist.

Auflösung. Sind A, B, C und D (Fig. 9.) die vier gegebenen Punkte, so macht man $AE = \frac{1}{2} AB$, $EF = \frac{1}{3} EC$ und $FX = \frac{1}{4} FD$, d. h. man verbindet den Punkt der kleinsten Summe der Quadrate der Entfernungen von den drei ersten Punkten mit dem vierten und schneidet ein Viertel dieser Linie ab; dann ist X der gesuchte Punkt.

Beweis. Betrachtet man die Abstände irgend eines anderen Punktes Z von A, B, C und D, so hat man nach den Gleichungen I bis III

$$BZ^2 + ZA^2 = 1 . 2\, AE^2 + 2EZ^2$$
$$CZ^2 + 2ZE^2 = 2 . 3\, EF^2 + 3FZ^2$$
$$DZ^2 + 3ZF^2 = 3 . 4\, FX^2 + 4XZ^2$$

Durch Addition folgt

$$ZA^2 + ZB^2 + ZC^2 + ZD^2 = 1 . 2\, AE^2 + 2 . 3\, EF^2 + 3 . 4\, FX^2 + 4XZ^2$$

welche Summe ein Minimum ist, wenn $XZ = 0$.

Hülfssatz. Ist endlich von der Dreiecksseite der n^{te} Theil abgeschnitten, so ist

IV. Thes. $BF^2 + (n-1)FA^2 = (n-1) . n\, AD^2 + n\, DF^2$

Der Beweis ist ganz entsprechend.

5. Den Punkt zu bestimmen, für welchen die Summe

der Quadrate der Entfernungen von beliebig vielen gegebenen Punkten ein Minimum ist.

Auflösung. Es leuchtet ein, daß man den für 4 Punkte gefundenen Punkt mit dem fünften verbindet, ein Fünftel dieser Linie abschneidet; diesen Punkt mit dem sechsten verbindet, ein Sechstel der Linie abschneidet u. s. f., bis man durch Abtheilen des n^{tel} der nach dem n^{ten} Punkte gezogenen Linie den gesuchten Punkt erhält.

Der Beweis dieses allgemeinen Satzes hat nun keine Schwierigkeit mehr.

§. 6.

1. Unter allen Dreiecken mit demselben Winkel an der Spitze und derselben Summe der ihn einschließenden Seiten hat das gleichschenkelige den größten Inhalt und die kleinste Grundlinie.

Beweis. Es sei (Fig. 10.) ABC das gleichschenkelige und ADE irgend ein anderes Dreieck, in denen

$$BE + EA + AC = EA + AC + CD$$

sein soll; weshalb $BE = CD$. Zieht man nun $EF \nparallel AC$, so ist auch das Dreieck BEF gleichschenkelig,

folglich $\Delta\, EFH \cong \Delta\, HCD$, mithin

$$\Delta\, BEH > HCD$$

also auch $\Delta\, ABC > ADE$.

Fällt man ferner die Höhe EG, so ist $GH < EH$, also auch das Doppelte: $BC < ED$.

2. Unter allen Dreiecken mit demselben Winkel an der Spitze und demselben Umfange hat auch das gleichschenkelige den größten Inhalt und die kleinste Grundlinie.

Beweis. Das eben betrachtete Dreieck ADE, in welchem die den Winkel A einschließenden Seiten zusammen gleich der Summe der Schenkel des Dreiecks ABC sind, hatte eine größere Grundlinie als dieses; mithin auch einen größeren

Umfang, während sein Inhalt kleiner als ABC war. Es würde aber noch kleiner werden, wenn man DE parallel seiner jetzigen Lage so weit in den Winkel hineinschöbe, bis der Umfang gleich dem des Dreiecks ABC würde. Damit hätte sich auch die Summe der den Winkel A einschließenden Seiten vermindert, folglich bliebe von den beiden gleich großen Umfängen in diesem Dreiecke für die dritte Seite mehr übrig, als in dem gleichschenkeligen Dreiecke ABC.

3. Von allen Dreiecken, welche denselben Winkel an der Spitze haben, und deren Grundlinien gleich sind, hat das gleichschenkelige Dreieck den größten Inhalt und die größte Summe der jenen Winkel einschließenden Seiten.

Der Beweis wird, wenn man den gegebenen Winkel fest denkt und die Grundlinie darin verschiebt, ebenso geführt; oder, wenn man die Grundlinie gemeinsam sein läßt, so beschreibe man über derselben als Sehne einen Kreisbogen, der den gegebenen Winkel als Peripheriewinkel enthält; dann liegen die Spitzen sämmtlicher zu betrachtenden Dreiecke in diesem Bogen, und es hat das gleichschenkelige die größte Höhe. Beschreibt man nun noch um seine Spitze mit einem Schenkel einen Kreis, und verlängert von jedem Dreiecke eine Seite bis zu dessen Peripherie, so ist jede Sehne gleich der Summe der den Winkel an der Spitze einschließenden Seiten. Unter diesen Sehnen ist die dem gleichschenkeligen Dreiecke angehörige ein Durchmesser.

4. Unter allen Dreiecken, welche denselben Winkel an der Spitze haben und deren Grundlinien durch einen innerhalb desselben gegebenen Punkt gehen, ist dasjenige, dessen Grundlinie durch diesen Punkt halbirt wird, das kleinste (§. 2. Nr. II.)

Beweis. Ist H (Fig. 10.) der gegebene Punkt und DE die Linie, welche durch ihn halbirt wird, BC aber irgendeine andere Linie, so ist sehr leicht zu zeigen, daß das Dreieck ABC $>$ als das Dreieck ADE.

§. 7.

1. Unter allen Dreiecken auf derselben Grundlinie und von gleichem Inhalte hat das gleichschenkelige den kleinsten Umfang.

Beweis. Die Spitzen der gegebenen Dreiecke liegen in einer Linie LN (Fig. 11.), welche mit AB parallel läuft. In derselben ist C der Punkt der kürzesten Entfernung von A und B, wenn der Winkel $v = w$ (§. 3. Nr. 1). Folglich ist Winkel CAB = Winkel ABC bei dem Minimum des Umfanges.

2. Unter den auf derselben Grundlinie stehenden Dreiecken von gleichem Umfange hat das gleichschenkelige den größten Inhalt.

Beweis. Das Dreieck ABC (Fig. 11.) sei das gleichschenkelige. Zieht man durch seine Spitze C eine Parallele LN mit der Grundlinie, so muß die Spitze jedes anderen Dreiecks, welches denselben Umfang hat, zwischen beide Parallelen fallen. Läge die Spitze E eines Dreiecks AEB außerhalb so wäre

$$AE + EB > AD + DB > AC + CB$$

(Nr. 1.), was gegen die Annahme verstößt. Ebenso kann die Spitze D nicht auf LN liegen. Weil sie also zwischen AB und LN fallen muß, so ist das Dreieck ABC das Maximum.

3. Das gleichseitige Dreieck hat den größten Inhalt von allen Dreiecken, welche denselben Umfang haben, und den kleinsten Umfang von allen Dreiecken, welche denselben Inhalt haben.

Beweis. Wäre das gleichseitige Dreieck nicht das größte unter allen Dreiecken von demselben Umfange, sondern irgend ein anderes Dreieck PQR, in welchem $PR > QR$, so könnte man auf der dritten Seite, PQ, ein gleichschenkeliges Dreieck PQS mit den Schenkeln $PS = QS = \frac{PR + QR}{2}$ con-

struiren, und erhielte dann (durch Nr. 2) das Ungereimte, daß das Dreieck PQS größer wäre als das größte Dreieck PQR. Also kann kein anderes als das gleichseitige das Maximum sein.

Wollte man annehmen, das gleichseitige Dreieck habe nicht den kleinsten Umfang unter den Dreiecken von gleichem Inhalte, sondern das Dreieck UVW, in welchem wenigstens zwei Seiten ungleich wären, so würde man über der dritten Seite ein gleichschenkeliges von derselben Höhe construiren, und käme (durch Nr. 1) auf ebensolchen Widerspruch.

4. Von allen Rechtecken, welche denselben Umfang haben, hat das Quadrat den größten Inhalt.

Aus §. 4. Nr. 2. ergiebt sich die Richtigkeit der Behauptung.

5. Von allen Rechtecken, welche gleichen Inhalt haben, hat das Quadrat den kleinsten Umfang.

Beweis. Es sei das Quadrat Q gleich dem Rechteck R. Man construire über der halben Summe zweier aufeinanderfolgender Seiten des Rechtecks R ein Quadrat Q_1, so ist $R < Q_1$ (Nr. 4); mithin auch $Q < Q_1$. Deswegen ist auch der Umfang des Quadrates Q kleiner als der des Quadrates Q_1, d. h. kleiner als der des Rechteckes R.

6. Von allen Vierecken, welche denselben Umfang haben, hat das Quadrat den größten Inhalt, sowie den kleinsten Umfang unter allen Vierecken von demselben Inhalte.

Beweis. Das Viereck, dessen Inhalt ein Maximum ist, muß 1) gleichseitig sein. Denn hätte das größte Viereck ungleiche Seiten, so könnte man von demselben durch eine Diagonale ein ungleichschenkeliges Dreieck abschneiden und statt dessen ein gleichschenkeliges, worin jeder Schenkel gleich der halben Summe der beiden ungleichen Seiten ist, ansetzen, welches dann (nach Nr. 2) größer als das abgeschnittene wäre, und man hätte mit Hinzunahme des Dreiecks auf der andern Seite der Diagonale ein Viereck erhalten, welches noch größer

wäre, als das größte. Daher kann das Maximum nicht ungleiche Seiten haben; es ist ein Rhombus. Derselbe muß aber 2) rechtwinkelig sein (nach §. 4. Nr. 1 Zusatz); mithin ist das Quadrat unter allen Vierecken von gleichem Umfange das Maximum.

Hätte unter den gleich großen Vierecken das mit dem kleinsten Umfange ungleiche Seiten, so ließe sich durch eine Diagonale ein ungleichschenkeliges Dreieck abschneiden und durch ein auf derselben Diagonale stehendes gleichschenkeliges Dreieck von derselben zugehörigen Höhe ersetzen, so würde der Umfang des so erhaltenen Vierecks (nach Nr. 1.) noch kleiner als der kleinste sein. Wäre ferner dieser Rhombus schiefwinkelig, so könnte man auf eine seiner Seiten ein gleich hohes Rechteck stellen, und hätte damit ein ungleichseitiges Viereck von demselben Inhalte, welches doch noch kleineren Umfang hätte; was nicht mehr möglich ist.

7. Unter allen Vielecken von derselben Seitenzahl und gleichem Umfange hat das größte gleiche Seiten. Ebenso ist unter denen von gleichem Inhalte dasjenige, welches den kleinsten Umfang hat, gleichseitig.

Die Beweise sind wie die von Nr. 3. und 6.

§. 8.

1. Von allen Vielecken, welche die Seiten bis auf eine bezüglich gleich haben, ist dasjenige am größten, dessen Ecken in der Peripherie eines Halbkreises liegen, worin jene letzte Seite Durchmesser ist.

Beweis. Läge irgend eine Ecke L des Maximums nicht in der Peripherie des Halbkreises, den man über der letzten Seite AZ beschreiben kann, so wäre der Winkel ALZ kein rechter. Dann construire man aus AL und LZ als Katheten ein rechtwinkeliges Dreieck, welches größer als das Dreieck ALZ wird (§. 4. Nr. 1). Setzte man nun an die Katheten die durch

AL und LZ vom größten Vielecke abgeschnittenen Stücke an, so hätte man ein von den gegebenen Seiten eingeschlossenes Vieleck erhalten, welches doch noch größer als das Maximum wäre. Daher muß jede Ecke in der Peripherie des Halbkreises liegen.

2. Unter den in einen gegebenen Kreis zu beschreibenden Vielecken von derselben Seitenzahl hat das regelmäßige den größten Umfang.

Beweis. Ließe sich von dem Vielecke, welches das Maximum des Umfanges hätte, durch eine Diagonale ein ungleichschenkeliges Dreieck abschneiden, so könnte es durch ein gleichschenkeliges ersetzt werden, welches dann (nach §. 6. Nr. 3.) ein Vieleck von noch größerem Umfange lieferte. Das Maximum muß also gleichseitig sein.

3. Von allen Vielecken, die man aus gegebenen Seiten bilden kann, ist dasjenige am größten, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt.

Beweis. Um das in einem Kreise liegende Vieleck mit irgend einem andern zu vergleichen, ziehe man in ersterem von einer Ecke D einen Durchmesser. Trifft dieser wieder auf einen Eckpunkt, so ziehe man in dem andern Vielecke die entsprechende Diagonale; dann folgt (aus Nr. 1.) die Richtigkeit der Behauptung. Durchschneidet aber der Durchmesser, DV, eine Seite, PQ, so verbinde man V mit P und Q und setze das Dreieck PVQ auch an das andere Vieleck und ziehe dort die dem Durchmesser entsprechende Diagonale; so ist (nach dem ersten Falle), das im Kreise liegende Vieleck das größere; also wenn man von beiden die Dreiecke PVQ wegläßt, das gegebene Kreisvieleck größer als das andere.

4. Das regelmäßige Vieleck ist das Maximum unter den Vielecken von derselben Seitenzahl, welche gleiche Umfänge haben.

Der Beweis folgt aus §. 7. Nr. 7. und §. 8. Nr. 3.

5. Das regelmäßige Vieleck hat von allen ihm an Inhalt gleichen Vielecken von derselben Seitenzahl den kleinsten Umfang.

Beweis. Es sei das unregelmäßige Vieleck V gleich dem regelmäßigen R. Man denke sich ein zweites regelmäßiges Vieleck Q von derselben Seitenzahl, welches den Umfang des unregelmäßigen Vielecks V habe. Alsdann ist (nach Nr. 4.) $Q > V$, also auch $Q > R$, mithin auch der Umfang von Q größer als der des ihm ähnlichen Vielecks R; d. h. der Umfang des Vielecks V übertrifft den des regelmäßigen.

§. 9. Hülfssätze und Schlußsatz.

1. Umfang und Inhalt des in einen gegebenen Kreis beschriebenen regelmäßigen Dreiecks sind kleiner, als Umfang und Inhalt des in denselben Kreis beschriebenen regelmäßigen Vierecks; diese wieder kleiner als die des regelmäßigen Fünfecks u. s. f.

Beweis. Man lege das Dreieck und Viereck mit einer Spitze A zusammen (Fig. 12.), verbinde die folgenden Ecken, D und B, so hat das unregelmäßige Viereck ADBC kleineren Umfang als das Quadrat (§. 8. Nr. 2.); also um so mehr das Dreieck. Mit dem Viereck und Fünfeck verfährt man ebenso.

Für den Inhalt stützt man sich auf den Satz, daß der Inhalt eines regelmäßigen Vielecks gleich dem halben Product aus dem Umfange und dem Radius des eingeschriebenen Kreises ist.

2. Das um einen Kreis beschriebene regelmäßige Dreieck hat einen größeren Umfang und größeren Inhalt als das um denselben Kreis beschriebene regelmäßige Viereck; bei diesem sind sie größer als beim regelmäßigen Fünfecke, u. s. f.

Beweis. Man theile den zur halben Dreiecksseite ge-

hörigen Winkel BMK (Fig. 13.), zur Erlangung des Vierecks in vier gleiche Theile; ebenso CMK. Läßt man die beiden äußersten Stücke fort, so bleibt $\angle$ EMF $= \frac{6}{6}$ R; also ist EF Seite des umgeschriebenen Quadrates. Im Dreieck BMH ist ein Winkel halbirt, also verhält sich

$$BM : MH = BE : EH$$

woraus man BE $>$ EH ableitet; ebenso bei den folgenden Stücken der Linie BK, die also immer kleiner werden. Demnach

$$\begin{array}{r} 3\,BE > EK \\ 3\,EK = 3\,EK \\ \hline 3\,BK > 4\,EK \end{array}$$

also ist der Umfang des gleichseitigen Dreiecks größer als der des Quadrates.

Den halben Vierecks-Centriwinkel EMK hat man, um zum Fünfeck zu kommen, in fünf gleiche Stücke zu theilen, u. s. w.

3. Bei gleichen Umfängen hat ein regelmäßiges Dreieck kleineren Inhalt als ein regelmäßiges Viereck, dieses wieder kleineren Inhalt als ein regelmäßiges Fünfeck, u. s. f.

Beweis. Da das um denselben Kreis beschriebene regelmäßige Viereck kleineren Umfang als das Dreieck hat, so muß, wenn beide Umfänge gleich sein sollen, der in das Viereck beschriebene Kreis größer sein, der in das Fünfeck noch größer, u. s. w. $J = \frac{1}{2} U \cdot r$.

4. Bei gleichem Inhalt ist der Umfang des regelmäßigen Dreiecks größer, als der des regelmäßigen Vierecks, dieser größer als der des Fünfecks, u. s. w.

Beweis. Da der Inhalt des regelmäßigen Dreiecks kleiner als der des Vierecks ist, so lange die Umfänge gleich sind, so muß, wenn der Inhalt des Dreiecks dem Vierecke gleich

werden soll, auch der Umfang des gleichseitigen Dreiecks sich vergrößern. U. s. w.

Aus diesen beiden Sätzen ergiebt sich:

Der Kreis hat von allen Vielecken gleichen Inhaltes den kleinsten Umfang und von allen Vielecken gleichen Umfanges den größten Inhalt.

Zweiter Theil.

Algebraische Lösung.

I. Abschnitt.

§. 10. Beispiele.

I. Von welchem Punkte der Hypotenuse eines gegebenen rechtwinkeligen Dreiecks muß man Perpendikel auf die Katheten fällen, damit das von ihnen und den Schenkeln des rechten Winkels umgrenzte Rechteck möglichst großen Inhalt habe?

Auflösung. Rückt der Punkt E (Fig. 14.), von welchem die Perpendikel ED und EF gefällt werden, auf der Hypotenuse nach dem Endpunkt A vor, so wird das Rechteck CDEF immer schmaler, bis sein Flächeninhalt endlich verschwindet, indem die Seiten mit der Kathete AC zusammenfallen. Nähert sich E dem andern Ende der Hypotenuse, so wird das Rechteck zwar breiter, aber auch immer niedriger, so daß sein Inhalt zuletzt wieder zu Null wird beim Zusammentreffen der Seiten in der andern Kathete BC. Zwischen diesen beiden Grenzen, Null und Null, muß der Inhalt einmal am größten sein.

Wir nennen die Grundlinie CF x und die Höhe EF y, so ist

$$R = xy$$

die Größe, welche ein Maximum werden soll. Indem das Rechteck vom Maximum bis Null heruntergeht, nimmt es alle denkbaren Zahlenwerthe an, die zwischen der Inhaltszahl des

Maximums und Null enthalten sind. Es muß dort also eine Stelle geben, an welcher es dieselbe Inhaltszahl hat, wie bei der gezeichneten Größe CDEF. Es sei dies das Rechteck CD'E'F', dessen Grundlinie und Höhe x_1 und y_1 heißen mögen; wir haben also auch

$$R = x_1 y_1.$$

Da y seine Größe wechselt, sobald x sich ändert, so müssen wir diese Abhängigkeit durch eine Gleichung angeben. Dazu führt die Aehnlichkeit der Dreiecke EBF und ABC,

$$y : (a - x) = b : a$$

wenn wir die Kathete BC mit a und AC mit b bezeichnen. Es giebt also die Gleichung

$$y = \frac{b}{a}(a - x)$$

an, was aus y wird, wenn wir x sich haben ändern lassen. Setzen wir diesen Werth von y ein, so läßt der Ausdruck

$$R = \frac{b}{a}(a - x)\,x$$

die Abhängigkeit der Inhaltszahl R von der veränderlichen Größe x vollständig erkennen. Von einer solchen abhängig-veränderlichen Größe R sagt man: sie sei eine Function der Variabeln x.

Durch Gleichsetzung der beiden Rechtecke CDEF und CD'E'F' haben wir

$$R = xy = x_1 y_1$$

oder nun

$$\frac{b}{a}(a - x)\,x = \frac{b}{a}(a - x_1)\,x_1$$

woraus

$$ax - x^2 = ax_1 - x_1^2$$

und

$$x_1^2 - x^2 = a\,(x_1 - x)$$

hervorgeht.

Zerlegt man die Differenz der Quadrate und bringt die Gleichung auf Null

$$(x_1 + x)(x_1 - x) - a\,(x_1 - x) = 0$$

so läßt sich der Factor $(x_1 - x)$ absondern

$$(x_1 - x)(x_1 + x - a) = 0,$$

wo dann entweder

$$x_1 - x = 0$$

oder

$$x_1 + x - a = 0$$

sein kann. Allein die erste Gleichung lehrt uns nichts; sie führte, da $x_1 = x$ sein müßte, wieder zu dem alten Rechtecke und nicht zu der gewünschten Bestimmung des zugehörigen neuen Rechtecks CD′E′F′. Vielmehr wird jedes Paar von gleichen Rechtecken den andern Factor zu Null machen müssen, und wir haben in

$$x_1 + x - a = 0$$

eine Gleichung, mittelst welcher man zu jedem willkürlich gewählten ersten Rechtecke CDEF das ihm gleiche Rechteck CD′E′F′ durch Berechnung seiner Grundlinie $x_1 = a - x$ auffinden kann. Bei solcher Berechnung (wie z. B. für $x = \frac{3}{10}a$ folgt $x_1 = \frac{7}{10}a$, für $x = \frac{4}{10}a$ kommt $x_1 = \frac{6}{10}a$) wird sich für x_1 eine andere Zahl ergeben, als wir für x angenommen haben. Hätten wir aber bei der Wahl des x zufällig das x des Maximums getroffen, so müßte für x_1 dieselbe Zahl herauskommen, weil ja dem Maximum kein ebenso großes Rechteck zur Seite steht. Daraus sehen wir, daß, wenn wir $x_1 = x$ setzen, in der Gleichung

$$x + x - a = 0$$

dasjenige x enthalten ist, welches dem Maximum angehört. Demnach

$$2x = a$$

$$x = \frac{1}{2}a$$

und dazu die Höhe

$$y = \frac{b}{a}(a - x) = \frac{1}{2}b.$$

Es müssen also die Perpendikel von der Mitte der Hypotenuse gefällt werden.

Hätten wir eine Aufgabe behandelt, in welcher ein Minimum zu bestimmen gewesen wäre, so würden wir ganz ebenso

geschlossen haben: wir suchen zu jeder beliebig gewählten Figur auf der andern Seite des Minimums die ihr gleiche, verschaffen uns eine Gleichung, wie die obige

$$x_1^2 - x^2 = a(x_1 - x)$$

dividiren sie durch $x_1 - x$, und haben so die Gleichung, welche alle Paare von gleichen Figuren befriedigen müssen.

Wir fassen das Verfahren, welches vorstehende Betrachtungen lehren, in folgende Regel zusammen:

Um das Maximum oder Minimum einer Function zu finden, muß man

1) aus ihr jede abhängige Veränderliche, wie y, entfernen, indem man sie mit Hülfe einer andern Gleichung durch die eine unabhängige Variable, x, bestimmt;

2) diesen Ausdruck gleich ebensolchem Ausdruck setzen, in welchem nur x_1 statt x geschrieben ist;

3) diese Gleichung durch Zusammenstellen der entsprechenden Glieder so ordnen, daß sich der Factor $x_1 - x$ herausdividiren läßt;

4) nachdem man durch $x_1 - x$ gehoben hat, $x_1 = x$ setzen; dann erhält man durch Auflösung der so gewonnenen Bestimmungsgleichung das gesuchte x des Maximums oder Minimums.

II. Wir lassen nun das Dreieck ABC sich um die Kathete AC drehen; dann beschreibt es einen graden Kegel und jedes der Rechtecke einen Cylinder. Der veränderliche Cylinder fängt, gleichsam als Linie AC, auch von Null an, wird immer größer, später immer flacher und endet, mit dem körperlichen Inhalte Null, als Kreisscheibe vom Radius CB. Wir können daher fragen:

Welcher Punkt der Hypotenuse liefert das Rechteck, welches bei der Umdrehung um eine Kathete des gegebenen Dreiecks den Cylinder vom größten Inhalt beschreibt?

Auflösung. Der Inhalt des von CDEF beschriebenen Cylinders ist

$$C = \pi x^2 y$$

oder, wenn wir den Ausdruck für y einsetzen,

$$C = \pi \frac{b}{a} (a - x) x^2.$$

Also

$$\pi \frac{b}{a} (a - x) x^2 = \pi \frac{b}{a} (a - x_1) x_1^2$$

$$ax^2 - x^3 = ax_1^2 - x_1^3$$

$$x_1^3 - x^3 = a (x_1^2 - x^2)$$

durch $x_1 - x$ dividirt,

$$x_1^2 + x_1 x + x^2 = a (x_1 + x)$$

$x_1 = x$ gesetzt,

$$3x^2 = 2ax$$

oder, da die Wurzel $x = 0$ auch den Cylinder $= 0$ geben würde,

$$3x = 2a$$

also $\quad x = \frac{2}{3}a$

folglich $\quad y = \frac{1}{3}b$

Der gesuchte Punkt schneidet also ein Drittel von der Hypotenuse ab, und zwar von demjenigen Endpunkte aus, welcher bei der Drehung den Grundkreis des Kegels beschreibt.

III. Der Umfang des Rechtecks hat kein Maximum; denn

$$U = 2 (x + y) = 2 \left(b + \frac{a - b}{a} x\right)$$

ist eine Größe, die mit x fortwährend wächst von $2b$ bis $2a$.

Der Mantel des Cylinders hat ein Maximum. Man hat in

$$M = 2\pi xy$$

dieselbe Function xy wie in Nr. 1. zu einem Maximum zu machen. Es ist also das dort gefundene Rechteck dasjenige, welches bei der Drehung den größten Cylindermantel beschreibt.

Endlich haben wir noch den Cylinder mit der größten Oberfläche aufzusuchen.

Die Oberfläche des vom Rechtecke CDEF beschriebenen Cylinders ist

$$F = 2\pi xy + 2\pi x^2$$

Nach Substitution von y erhält man

$$F = \frac{2\pi}{a}\,[abx - (b - a)\,x^2]$$

Aus diesem Ausdrucke ersieht man, daß $a < b$ sein muß; sonst nimmt die Function F mit x fortwährend zu. Wie in Nr. I. wird abgeleitet

$$x = \frac{ab}{2\,(b - a)}$$

oder $$(b - a) : \frac{b}{2} = a : x.$$

Da aber $x < a$ werden muß, so zeigt sich die noch mehr einschränkende Bedingung, daß

$$\frac{b}{2} < b - a, \text{ also } a < \tfrac{1}{2} b$$

sein muß. Ist das gegebene Dreieck ABC von solcher Gestalt, so benutzt man die Schenkel des Winkels ACB, um x der Proportion gemäß bequem zu construiren.

§. 11. Aufgaben.

Hiernach können folgende Uebungsaufgaben behandelt werden:

1. Welches ist das Maximum aller Parallelogramme mit einem gegebenen Winkel, die man in ein durch Grundlinie und Höhe gegebenes Dreieck so einschreiben kann, daß eine Seite des Parallelogramms in eine Seite des Dreiecks und die beiden andern Ecken des Parallelogramms in die beiden andern Dreiecksseiten fallen?

Antwort. Die beiden Ecken des Parallelogramms liegen in den Halbirungspunkten der Seiten. Grundlinie und Höhe des Parallelogramms sind die Hälften der Grundlinie und Höhe des Dreiecks.

2. Unter den Rechtecken, welche einem Quadrate so eingeschrieben werden können, daß ihre Seiten den Diagonalen des Quadrates parallel laufen, das größte zu bestimmen.

Auflösung. Es ist dasjenige, dessen Ecken mitten in den Seiten des Quadrates liegen; weshalb es gleichfalls ein Quadrat ist.

3. Unter den auf quadratischer Basis stehenden graden Parallelepipeden, die einem regelmäßigen Octaeder so eingeschrieben werden können, daß ihre Axe in einer Diagonale desselben liegt, dasjenige zu bestimmen, welches den größten Inhalt hat.

Auflösung. Die Höhe eines solchen rechtwinkeligen Parallelepipedons sei $2y$, die Seiten der Grundfläche x, so ist sein Inhalt

$$P = 2yx^2$$

Es ist aber die halbe Kante y die Seite eines gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse $a - x$ ist (wenn a die Kante des Octaeders bedeutet), weshalb

$$y = (a - x)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

also

$$P = x^2 (a - x)\sqrt{2}$$

Es ergiebt dies $x = \frac{2}{3}a$. Die Ecken des Maximums liegen zwei Drittel der Kanten von den Scheiteln der Axe des Octaeders entfernt.

Zusätze. Das Maximum ist nicht ein Würfel, vielmehr verhalten sich Höhe und Grundflächenkante wie Seite und Diagonale eines Quadrates. Die Axe des Maximums ist der dritte Theil der Axe des Octaeders. Jede der beiden Diagonalebenen des Octaeders, welche durch die Axe des größten Parallelepipedons gehen, schneidet dasselbe in einem Rechtecke, welches aus zwei Quadraten zusammengesetzt ist.

4. Welches dieser Parallelepipeda hat die größten Rechtecke zu Seitenflächen?

Auflösung. Dasjenige, dessen Ecken in den Mitten der Octaederkanten liegen.

Zusätze. Hier ist x die Seite und 2y die Diagonale eines Quadrates, während beim Maximum der vorigen Aufgabe das Verhältniß umgekehrt war. Also auch hier ist es nicht der Würfel, sondern ein rechtwinkeliges Parallelepipedon, welches nicht nur von der Diagonalebene des Octaeders, die der Basis der Prismen parallel ist, sondern auch von den beiden andern in einem Quadrate geschnitten wird.

Anmerkung. Die Bestimmung des Parallelepipedons mit dem Maximum der Oberfläche ist nicht schwer; es ist aber das Resultat kein einfaches:

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 1} = \frac{2}{7}(2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}})\,a$$

$$2y = \frac{2}{7}(3\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 1)\,a$$

so daß $\frac{2y}{x} = \sqrt{2} - 1$, d. h. Kante und Höhe verhalten sich, wie in einem Quadrate die Seite und die Differenz der Diagonale und Seite.

5. Das Maximum der gleichschenkeligen Dreiecke zu bestimmen, welche in umgekehrter Lage einem gleichseitigen Dreiecke so eingeschrieben werden können, daß ihre Spitze im Halbirungspunkte der Grundlinie sich befindet.

Auflösung. Es ist auch gleichseitig.

6. Wo muß durch ein regelmäßiges Tetraeder ein der Grundfläche paralleler Querschnitt geführt werden, damit derselbe Basis des größten Tetraeders sei, das mit der Spitze sich auf die Mitte der Grundfläche stützt?

Auflösung. Bezeichnet man die Grundfläche des gegebenen Tetraeders mit G, die des eingeschriebenen mit g, so ist, wenn h die Höhe des gegebenen Tetraeders und x den Abstand des Querschnittes von der Spitze bedeutet,

$$g = \frac{x^2}{h^2}\,G$$

also der Inhalt

$$T = \frac{1}{3} \frac{G}{h^2} x^2 (h - x)$$

woraus sich $x = \frac{2}{3} h$ ergiebt.

Zusätze. Da der Querschnitt zwei Drittel der Höhe von der Spitze entfernt ist, so ist auch jede seiner drei Seiten $= \frac{2}{3} a$. Für die drei andern Kanten aber, welche nach der Mitte der Grundfläche des gegebenen Tetraeders laufen, erhält man $\frac{1}{3} a \sqrt{2}$. Das größte Tetraeder ist also nicht regelmäßig; vielmehr stehen die drei auf der Mitte der Grundfläche sich vereinigenden Kanten auf einander senkrecht. Das Maximum ist ein Octant eines regelmäßigen Octaeders. Der Schwerpunkt desselben liegt $\frac{1}{4} h$ vom Fußpunkte der Höhe des gegebenen Tetraeders entfernt; ebendaselbst liegt auch der Schwerpunkt des letzteren. Das Maximum der eingeschriebenen graden Tetraeder ist also dasjenige, dessen Schwerpunkt mit dem des gegebenen regelmäßigen Tetraeders zusammenfällt. Dasselbe findet statt bei dem Maximum der einem gleichseitigen Dreiecke umgekehrt eingeschriebenen gleichschenkeligen Dreiecke (vergl. Nr. 5.) In dieser Eigenschaft also, und nicht in der Gleichartigkeit der Form des Maximums mit der der Hauptfigur, stimmen diese entsprechenden körperlichen und ebenen Figuren überein.

7. Schwerer ist die Bestimmung, bei welchem von diesen eingeschriebenen graden Tetraedern die drei gleichschenkeligen Seitendreiecke im Maximum sind.

Auflösung. Man drücke alle bekannten Größen durch die Höhe des gegebenen Tetraeders h aus. Dann erhält man den Inhalt eines der Dreiecke

$$\Delta = \frac{1}{8} \sqrt{3} \cdot \sqrt{9x^4 - 16hx^3 + 8h^2x^2}$$

woraus durch eine rein-quadratische Gleichung einfach $x = \frac{2}{3} h$ folgt. Das Tetraeder ist also das nämliche wie in Nr. 6.

8. Welche von den Kugeln, die man um einen Punkt in

der Oberfläche einer Kugel construiren kann, hat innerhalb der gegebenen Kugel die größte Calotte?

Auflösung. Man ziehe von dem gegebenen Punkte einen Durchmesser der gegebenen Kugel, und mache ihn zur Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, in welchem ein nach dem Grundkreise der Calotte gezogener Kugelradius x Kathete ist. Dann ist die Höhe der Calotte die Differenz eines Radius x und einer Linie, die als Hypotenusenabschnitt $= \frac{x^2}{2r}$ ist. Daher ist die Calotte

$$C = \left(2\pi x\ x - \frac{x^2}{2r}\right)$$

woraus sich $x = \frac{4}{3} r$ findet.

Zusatz. Die größte Calotte ist ein Sechstel ihrer Kugeloberfläche und zwei Drittel der Calotte, welche sie aus der gegebenen Kugel ausschneidet.

9. Zu welcher von diesen Calotten gehört der größte Kugelsector?

Auflösung. Hier ergiebt sich $x = \frac{3}{2} r$.

Zusatz. Der größte Sector ist ein Achtel seiner Kugel.

§. 12.

Die Aufgaben Nr. 1. bis 4. entsprechen den Nr. 3., 4. und 6., 7., des vorhergehenden Paragraphen.

1. Es sollen in ein regelmäßiges Octaeder grade Cylinder eingeschrieben werden, so daß ihre Axen Theile einer Diagonale sind. Welcher Cylinder hat den größten Inhalt?

Auflösung. Nennt man die Höhe eines Cylinders 2y, den Radius des Grundkreises x, so erhält man aus

$$C = \pi \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot x^2\ (a - 2x)$$

leicht $x = \frac{1}{3} a$ und $y = \frac{1}{3} a \sqrt{\frac{1}{2}}$; also verhalten sich Durchmesser des Grundkreises und Höhe wie Diagonale und Seite eines Quadrates. Der Radius des Grundkreises ist ein Drittel der Kante und die Höhe ist ein Drittel der Diagonale.

2. Welcher Cylinder hat den größten Mantel?

Auflösung. $M = 2\pi\sqrt{2}\cdot x\,(a - 2x)$ giebt $x = \frac{1}{4}a$ und $y = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$. Also ist der Durchmesser des Grundkreises die Hälfte der Kante und die Axe des Cylinders die halbe Axe des Octaeders.

Anmerkung. Was die Bestimmung der größten Oberfläche betrifft, so gilt ganz dasselbe, was §. 11. Nr. 4. Anm. gesagt ist. Hier hat der Durchmesser des Grundkreises den Ausdruck der dortigen Kante der Grundfläche.

3. Es sollen in ein regelmäßiges Tetraeder grade Kegel so eingeschrieben werden, daß die Spitzen derselben im Fußpunkte einer Höhe liegen, und die Axen mit dem unteren Theile der Höhe zusammenfallen. Welcher Kegel ist der größte?

Auflösung. Ist x der Abstand des Grundkreises von der Spitze des Tetraeders und y der Radius der Kegelbasis, so drücke man die gebrauchten Linien des Tetraeders durch die Höhe h aus; dann findet man aus

$$K = \frac{\pi}{3}y^2\,(h - x) = \frac{\pi}{24}x^2\,(h - x)$$

sofort $x = \frac{2}{3}h.$

Zusätze. Der Schwerpunkt des größten Kegels fällt in den des Tetraeders. Der Radius des Grundkreises verhält sich zur Höhe des Kegels wie Seite und Diagonale eines Quadrates. Deutlicher wird die Form des Maximums festgestellt, wenn man denjenigen Kegel sich denkt, welcher das Tetraeder einhüllt. Diesem umgeschriebenen Kegel ist nämlich das Maximum der eingeschriebenen ähnlich; denn die Seitenlinien bilden in beiden denselben Winkel mit der Axe, was sich aus Aehnlichkeit rechtwinkeliger Dreiecke, deren Katheten proportional sind, ergiebt (oder die trigonometrischen Tangenten dieser Winkel sind $= \sqrt{\frac{1}{2}}$).

4. Welcher von den eingeschriebenen graden Kegeln hat den größten Mantel? (Vergl. §. 11. Nr. 7.)

Auflösung. $M = \frac{\pi}{8} x \sqrt{9x^2 - 16hx + 8h^2}$ giebt $x = \frac{2}{3}h$. Der Kegel vom größten Inhalte hat auch den größten Mantel (was für den Cylinder (Nr. 5.) nicht der Fall ist.)

5. Unter den graden Cylindern, die man dem regelmäßigen Tetraeder auf dieselbe Weise einschreiben kann, hat welcher den größten Mantel?

Auflösung. $M = \pi\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot x\,(h - x)$ giebt $x = \frac{1}{2}h$. Während die Höhe des Cylinders vom größten Inhalte $\frac{1}{3}h$ beträgt (vergl. Nr. 3.), ist die des Cylinders vom größten Mantel $\frac{1}{2}h$. Hier verhält sich der Durchmesser des Grundkreises zur Höhe des Cylinders wie Seite und Diagonale eines Quadrates.

6. Wie groß muß bei den Cylindern, welche einer auf regelmäßiger Grundfläche stehenden Pyramide so eingeschrieben werden können, daß der obere Grundkreis die Seitendreiecke berührt, die Höhe sein, damit der Inhalt ein Maximum sei; und wie hoch ist derjenige unter den graden Cylindern, welcher den größten Mantel hat?

Auflösung. Ist x der Abstand des Querschnittes von der Spitze, y der Radius des Grundkreises und r der Radius des dem Vielecke eingeschriebenen Kreises, so erhält man aus

$$C = \pi y^2 (h - x) = \pi \frac{h}{r} y^2 (r - y)$$

$y = \frac{2}{3}r$ und daher $x = \frac{1}{3}h$.

Dann aus $M = \pi y\,(h - x) = \pi \frac{h}{r} y\,(r - y)$

$y = \frac{1}{2}r$ und $x = \frac{1}{2}h$. Bei allen beliebig gegen die Grundfläche geneigten Cylindern, deren Höhe ein Drittel der Pyramidenhöhe beträgt, ist der Inhalt im Maximum, und bei dem graden Cylinder, der die halbe Höhe der Pyramide hat, ist der Mantel der größte.

Anmerkung. Statt der Pyramide hätte man auch einen graden oder schiefen Kegel nehmen können; ja die Lösung hat keine Schwierigkeit, wenn derselbe auf einer Ellipse steht:

In welcher Höhe muß man einen elliptischen Kegel parallel der Basis durchschneiden, damit ein von dem Querschnitte nach irgend einer Stelle der Grundebene hinabgezogener elliptischer Cylinder das Maximum des Inhaltes habe?

Auflösung. Sind α und β die Halbaxen des Querschnittes, wie a und b die der Basis, so ist

$$C = \pi\alpha\beta\,(h - x).$$

Es verhält sich aber

$$\alpha : a = x : h$$

und auch $\quad \beta : b = x : h$

und darum ist $\quad C = \pi\frac{ab}{h^2}\cdot x^2\,(h - x)$

woraus $\quad x = \frac{2}{3}h.$

Es verhält sich der Inhalt des Maximums zum gegebenen Kegel wie $2^2 : 3^2$.

7. In welchem Verhältnisse muß die Seite eines graden Kegels zum Radius des Grundkreises stehen, damit das Maximum der in umgekehrter Lage ihm eingeschriebenen graden Tetraeder regelmäßig sei?

Auflösung. Ist x der Radius des um das Grunddreieck beschriebenen Kreises, y sein Abstand von der Spitze, so ist

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{3}\frac{r^2}{h^2}\cdot y^2\,(h - y).$$

Die Höhe des größten Tetraeders ist also wieder ein Drittel der Höhe des Kegels, so daß beide einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt haben. Nun ist das Quadrat jeder Tetraederkante, die nach dem Mittelpunkte der Kegelbasis geht $= \frac{4}{9}r^2 + \frac{1}{9}h^2$ und das Quadrat jeder Seite des Grunddreiecks $= \frac{4}{3}r^2$. Soll das Tetraeder regelmäßig werden, so muß

$$\frac{4}{9}r^2 + \frac{1}{9}h^2 = \frac{4}{3}r^2$$

also $h^2 = 8r^2$ sein, und darum die Seite des Kegels dreimal so groß, als der Radius des Grundkreises.

8. In welchem Verhältnisse muß die Seite eines graden Kegels zum Radius des Grundkreises stehen, wenn das Maximum der graden auf quadratischer Basis stehenden Parallelepipeda, welche er umschließt, ein Würfel sein soll?

Antwort. In demselben Verhältnisse wie in der vorhergehenden Aufgabe.

§. 13.

1. Welches ist das größte unter den Dreiecken, die ihre Spitzen im Mittelpunkte eines gegebenen Kreises haben und deren Grundlinien parallele Sehnen sind?

Auflösung. Zunächst überzeuge man sich, daß das Dreieck ABM (Fig. 15.), wenn die Grundlinie AB dem Punkte D näher rückt, zuletzt Null wird, indem die Seiten mit dem Radius MD zusammenfallen; ferner daß, wenn AB nach dem Mittelpunkte hin sich bewegt, seine Fläche im Durchmesser FG wieder verschwindet. Es ist also die Frage möglich, in welcher Lage das Dreieck am größten gewesen ist. Bezeichnet man die halbe Grundlinie, AC, mit y, die Höhe mit x, so ist der Inhalt des Dreiecks

$$D = xy$$

oder, da $x^2 + y^2 = r^2$,

$$D = x \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Man setzt also

$$x \sqrt{r^2 - x^2} = x_1 \sqrt{r^2 \; x -_1^2}$$

woraus man, nachdem man in's Quadrat erhoben hat, erhält

$$x_1^4 - x^4 = r^2 (x_1^2 - x^2).$$

Hier kann man sogleich durch $x_1^2 - x^2$ dividiren,

$$x_1^2 + x^2 = r^2.$$

Daher für $x_1 = x$

$$2x^2 = r^2$$

also $\quad x = r \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ und nun auch $y = r \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$

Deshalb ist das Dreieck ACM für das Maximum gleichschenkelig, der Winkel AMC ein halber Rechter. Das Maximum ist also das rechtwinkelige unter diesen Dreiecken; seine Grundlinie diejenige Sehne, welche die Seite des dem Kreise eingeschriebenen Quadrates ist.

Anmerkung. Während sich die Sehne AB von D bis zum Mittelpunkte M hinschiebt, nimmt der Umfang des Dreiecks fortwährend zu, von 2r bis 4r. Derselbe hat also kein Maximum.

2. Die Figur drehe sich um den Durchmesser DE als Axe. Welches Dreieck beschreibt bei der Rotation den größten Kegel?

Auflösung. $\dot{K} = \frac{1}{3}\pi x y^2 = \frac{1}{3}\pi x (r^2 - x^2)$
ergiebt $x = r \sqrt{\frac{1}{3}}$, also $y = r \sqrt{\frac{2}{3}}$.
Man construirt $x = \sqrt{\frac{1}{3} r \cdot r}$, indem man MG in drei gleiche Theile theilt und über FH nach rechts einen Halbkreis beschreibt; derselbe schneidet aus MD die gesuchte Höhe x heraus.

Anmerkung. Mantel und Oberfläche dieser graden Kegel haben kein Maximum.

3. Mit diesen Aufgaben stimmen die Auflösungen der folgenden beiden ganz überein:

Vom Mittelpunkte einer Ellipse nach ihrem Umfange eine Linie so zu ziehen, daß das von ihr, der Ordinate ihres Endpunktes und einem Theile der Axe gebildete Dreieck möglichst groß werde.

Die Auflösung ergiebt $x = a \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $y = b \sqrt{\frac{1}{2}}$. Für das Maximum verhält sich demnach

$$x : y = a : b$$

und darum ist es dem Dreiecke ähnlich, welches von den beiden Halbaxen und der ihre Endpunkte verbindenden Sehne, die wir Scheitelsehne nennen wollen, gebildet wird. Man findet also die im Umfange der Ellipse liegende Spitze des

größten Dreiecks, wenn man vom Mittelpunkte eine Parallele mit einer Scheitelsehne zieht.

4. Welches ist der größte unter den Kegeln, die ihren Scheitel im Mittelpunkte eines Rotationsellipsoides haben, und deren Grundkreis ein zur Rotationsaxe senkrechter Querschnitt ist?

5. Welcher unter diesen graden Kegeln hat den größten Mantel?

Die Auflösung erfolgt einfacher, wenn man hier die Entwickelung nach y macht. Es findet sich ganz leicht (e bedeutet die Entfernung eines Brennpunktes vom Mittelpunkte)

$$y = \frac{ab}{e}\sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ und dazu noch } x = \frac{a}{e}\sqrt{\frac{e^2 - b^2}{2}}$$

woraus hervorgeht, daß die Aufgabe nur für solche Ellipsoide möglich ist, in welchen

$$b < e$$

ist.

Construction. Man beschreibe mit b um den Brennpunkt einen Kreis und ziehe vom Mittelpunkte der Ellipse einen Halbmesser, welcher diesen berührt, so hat man die Erzeugungslinie des größten Kegelmantels. Der Beweis ist leicht zu führen.

Anmerkung. Die Rotation der Ellipse muß um die große Axe stattgefunden haben. Wegen der Bedingung $b < e$ konnte bei der Kugel (Nr. 2. Anm.) kein Maximum eintreten. Es mag hier noch bemerkt werden, daß es ein Maximum der Oberfläche auch bei dem Ellipsoide nicht giebt.

6. Ganz ebenso sind die Auflösungen folgender Aufgaben:

In einen Kreis das größte Rechteck einzuschreiben. (Vergl. §. 18. Nr. 1.)

7. Welcher von den einer Kugel eingeschriebenen Cylindern hat das Maximum des Inhaltes?

Auflösung. Es findet sich, außer $x = 0$, was den Cylinder zu Null machen würde, der Radius des Grundkreises $x = r\sqrt{\frac{2}{3}}$ und die halbe Höhe $y = r\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Zusatz. Die Form des Maximums ist der Art, daß sich Durchmesser des Grundkreises und Höhe verhalten wie Diagonale und Seite eines Quadrates. Wenn man daher auf ein seinem Grundkreise eingeschriebenes Quadrat ein rechtwinkeliges Parallelepipedon bis zum oberen Grundkreise des Cylinders errichtet, so wird es ein Würfel.

Anmerkung. Das größte Rechteck liefert bei der Rotation den Cylinder mit größtem Mantel.

Die Auflösung der Aufgabe über das Maximum des Umfanges des Rechtecks s. §. 18. Nr. I, und der Oberfläche des Cylinders s. §. 20. Nr. II.

8. In eine Ellipse das größte Rechteck zu beschreiben.

Auflösung. Die aus $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $y = b\sqrt{\frac{1}{2}}$ sich ergebende Proportion $x : y = a : b$ lehrt, daß man die Eckpunkte erhält, wenn man zwei Durchmesser parallel den vier Scheitelsehnen zieht. Das Maximum ist gleich dem von diesen Sehnen eingeschlossenen Rhombus.

9. In ein Rotationsellipsoid den größten graden Cylinder einzuschreiben.

Zusatz. Welcher unter den einem dreiaxigen Ellipsoide eingeschriebenen graden elliptischen Cylindern, deren Axen Stücke einer Axe des Ellipsoides sind, hat den größen Inhalt?

Auflösung. Die Grundfläche des Cylinders (Fig. 16.) ist eine Ellipse, deren Inhalt πxy ist, seine Höhe $2z$, mithin $C = 2\pi xyz$. Nun giebt die Ellipse ABCD $x = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - z^2}$ und die Ellipse BGDH $y = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - z^2}$. Mithin

$$C = 2\pi \frac{ab}{c^2} \cdot z\,(c^2 - z^2)$$

woraus $z = c\sqrt{\frac{1}{3}}$ und daher $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ und $y = b\sqrt{\frac{2}{3}}$. Der größte Cylinder, dessen Axe in der C=Axe liegt, hat also ein Volumen

$$V = \frac{4}{3}\pi abc\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Dieser in Bezug auf a, b und c symmetrische Ausdruck lehrt, daß die drei Cylinder, welche ihre Axe in der A=, B= und C=Axe des Ellipsoides haben, einander gleich sind, wiewohl sie verschiedene Gestalt haben. Diese an Größe übereinstimmenden Maxima der drei Systeme von eingeschriebenen Cylindern verhalten sich zum Ellipsoide wie $1 : \sqrt{3}$.

Anmerkung. Den Cylinder mit dem größten Mantel beschreibt bei der Rotation das größte in die Ellipse eingeschriebene Rechteck. (Nr. 8.)

§. 14.

1. Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks werde über die Grundlinie verlängert; von Punkten der Verlängerung sollen Linien durch die Endpunkte der Grundlinie bis zu der Geraden, welche durch die Spitze parallel der Grundlinie läuft, gezogen werden. Von den so erhaltenen umgeschriebenen gleichschenkeligen Dreiecken ist das Minimum zu ermitteln.

Auflösung. Man muß die Höhe um sich selbst verlängern. Die Seiten des Minimums sind auch gleich, und doppelt so lang, wie die des gegebenen.

2. Die Höhe eines regelmäßigen Tetraeders werde über die Grundfläche hinaus verlängert. Von einem Punkte der Verlängerung werden Linien durch die Ecken des Grunddreiecks bis zu der durch die Spitze mit der Grundfläche parallel gelegten Ebene gezogen. Von welchem Punkte muß man die Linien ziehen, damit das durch diese Kanten bestimmte Tetraeder das Minimum der umgeschriebenen ist?

Auflösung. Da sich die Grundflächen ähnlicher Pyramiden verhalten wie die Quadrate der Höhen, so hat man

$$T = \frac{1}{3}xG = \frac{1}{3}g\frac{x^3}{(x-h)^2}$$

was durch die Gleichung $x^2 - 4hx + 3h^2 = 0$ ergiebt $x_1 = 3h$ und $x_2 = h$. Der letztere Werth würde aber das Tetraeder unendlich groß machen. Die Seite des Grunddreiecks im Minimum ist $y = \frac{3}{2}a$. In einem regelmäßigen Tetraeder ist die Höhe $= a\sqrt{\frac{2}{3}}$, während in diesem $x = 2 \cdot y\sqrt{\frac{2}{3}}$. Es ist also doppelt so hoch, als das mit ihm auf derselben Grundfläche stehende regelmäßige Tetraeder.

Zusatz. Für regelmäßige Dreiecke wie für Tetraeder ist das Minimum der umgeschriebenen gleichschenkeligen Figuren diejenige, deren Schwerpunkt in den der gegebenen fällt.

3. Ein auf einer unbegrenzten Ebene stehender Würfel soll von Kegelmänteln so überdeckt werden, daß die frei über der Grundebene stehenden Eckpunkte in ihnen liegen. Welches ist das Minimum des Inhaltes dieser Kegel?

Auflösung. Es ist ein Kegel, in welchem die Höhe gleich dem Durchmesser des Grundkreises ist. Jede dieser Linien beträgt das Dreifache der Würfelkante.

4. Durch den Mittelpunkt eines Würfels ist eine unbegrenzte Linie senkrecht durch die Grundfläche gezogen. Von je zwei gleich weit vom Mittelpunkte entfernten, außerhalb des Würfels liegenden Punkten derselben sollen Linien durch die ihnen zunächst liegenden Ecken des Würfels gelegt werden, wodurch ein Octaeder bestimmt wird. Von welchen Punkten laufen die Kanten des kleinsten Octaeders aus? (Vergl. §. 35. Nr. 1.)

Auflösung. Man hat die Kante des Würfels außerhalb an die Mittellinie anzusetzen, um jene Ecken des kleinsten Octaeders zu erhalten. Dasselbe ist aber nicht regelmäßig.

5. Welches ist der kleinste unter den Rhomben, die einem Quadrate so umgeschrieben werden können, daß ihre Diago-

nalen, mitten zwischen den Quadratseiten, ihnen parallel laufen?

Auflösung. Sind x und y die halben Diagonalen, so ist der Inhalt

$$J = 2xy = a \frac{x^2}{x - \frac{a}{2}}$$

und daher $x = a = y$.

Es ist also das Quadrat.

6. Welcher unter diesen Rhomben hat den kleinsten Umfang?

Auflösung. $U = 4\sqrt{x^2 + y^2} = 4\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}\left(\frac{x}{x - \frac{a}{2}}\right)^2}$

Bei der Entwickelung löse man die Differenz der Quadrate der Brüche $\left(\frac{x}{x - \frac{a}{2}}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{x_1 - \frac{a}{2}}\right)^2$ in das Product aus Summe und Unterschied auf, und bringe nur in der Klammer mit dem Unterschiede die Brüche auf gemeinsamen Nenner. Man erhält nach Gleichsetzung von x_1 und x

$$\left(\frac{\frac{a}{2}}{x - \frac{a}{2}}\right)^3 = 1$$

mithin $x = a = y$, also auch das Quadrat.

§. 15.

1. Es soll das größte auf quadratischer Basis stehende grade Parallelepipedon gefunden werden, welches einer gegebenen Kugel eingeschrieben werden kann.

Auflösung. Es ist der Kubus.

2. Es möge das größte rechtwinkelige Parallelepipedon ermittelt werden, welches einer gegebenen Kugel eingeschrieben werden kann, wenn die Grundfläche ein Rechteck mit der Seite a sein soll.

Auflösung. Setzt man das Kathetenquadrat $(2r)^2 - a^2 = b^2$, so erhält man

$$x = b\sqrt{\tfrac{1}{2}} = y.$$

Daher sind die Nebenflächen, welche die Kante a nicht enthalten, Quadrate.

3. Einer Kugel den seinem Inhalte nach größten Kegel einzuschreiben.

Auflösung. Zunächst ist klar, daß es ein grader Kegel sein wird. Berechnet man dessen Höhe, da das Quadrat des Radius seines Grundkreises sich leicht durch die Abschnitte, in welche er den zu ihm senkrechten Durchmesser theilt, ausdrücken läßt, so erhält man für die Höhe $\frac{4}{3}r$. Demnach ist das Maximum derjenige Kegel, dessen Schwerpunkt in den der Kugel fällt.

4. Einer Kugel denjenigen graden Kegel einzuschreiben, welcher den größten Mantel hat.

Auflösung. Man suche wiederum die Höhe. Es ergiebt sich ebenso, daß es derselbe Kegel ist.

Anmerkung. Die Bestimmung des Kegels mit größter Oberfläche s. §. 19. Nr. 3.

5. Einer Halbkugel denjenigen abgestumpften Kegel einzuschreiben, welcher den größten Mantel hat.

Auflösung. Da die Seite des Kegels die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser und ihrer Projection auf denselben ist, so hat man, wenn x der Radius des oberen Kreises ist,

$$M = \pi\,(r + x)\,\sqrt{2r\,(r - x)}$$

woraus sich $x = \frac{r}{3}$ ergiebt.

Anmerkung. Das Maximum des Inhaltes und der Oberfläche s. §. 36. Nr. 1 und 2.

6. Es ist ein grader Kegel gegeben, dessen Axendreieck an der Spitze einen rechten Winkel hat. Um Punkte, die in der Axe und ihrer Verlängerung über den Scheitel hinaus liegen, seien Kugeln beschrieben, welche den Grundkreis in seinem Mittelpunkte berühren. Wo liegt der Mittelpunkt derjenigen Kugel, bei welcher das von dem Kegelmantel abgegrenzte Kugelsegment ein Maximum ist?

Auflösung. Der unbekannte Radius der Kugel heiße ρ, die Höhe des Segments x, so soll

$$S = \frac{\pi}{3} x^2 (3\rho - x)$$

ein Maximum werden. Da das Axendreieck rechtwinkelig sein soll, so ist der Radius des Grundkreises des Segmentes gleich dem Abstande dieses Grundkreises von der Spitze des Kegels; folglich hat man aus

$$\rho^2 = (h - x)^2 + (\rho - x)^2$$

$$\rho = \frac{(h - x)^2 + x^2}{2x}$$

und es wird

$$S = \frac{\pi}{6} (3h^2x - 6hx^2 + 4x^3)$$

woraus sich ganz leicht ableitet

$$\left(x - \frac{h}{2}\right)^2 = 0$$

also $x = \frac{h}{2}$ und auch $\rho = \frac{h}{2}$. Folglich ist der Halbirungspunkt der Höhe der Punkt, welcher das größte Segment liefert, und dieses ist hier eine Halbkugel. Das Maximum gehört derjenigen Kugelfläche an, welche durch den Scheitel des Kegels geht.

Anmerkung. Den allgemeinen Fall s. §. 38. Nr. 2.

§. 16.

1. Unter allen graden Cylindern von gleicher Oberfläche (sie soll nämlich gleich der gegebenen Kugelfläche vom Radius r sein) denjenigen zu finden, welcher das größte Volumen hat.

Auflösung. Da man mit Hülfe des Ausdruckes für die vorgeschriebene Oberfläche leicht die Höhe eliminiren kann, so ergiebt sich zuerst der Radius des Grundkreises $= r\sqrt{\frac{2}{3}}$, so daß man ihn leicht als die mittlere Proportionale zwischen 2r und $\frac{1}{3}$r construiren kann. Dann findet man die Höhe des größten Cylinders gleich dem Durchmesser seines Grundkreises; darum ist der Axenschnitt des Maximums ein Quadrat.

2. Unter allen graden Cylindern von gleichem Volumen, dessen Größe als eine Kugel vom Radius r gegeben ist, denjenigen zu ermitteln, welcher die kleinste Oberfläche hat.

Auflösung. Hier ergiebt sich der Radius des Grundkreises $= r\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = 0{,}87358\,r$. (Eine Kubikwurzel läßt sich nicht auf elementarem Wege geometrisch construiren.) Die Höhe ist gleich dem Durchmesser des Grundkreises. Der Cylinder hat also dieselbe Gestalt, wie das Maximum der vorhergehenden Aufgabe.

3. Unter allen graden Kegeln von gleicher Oberfläche, welche gleich der einer Kugel vom Radius r ist, denjenigen zu finden, welcher den größten kubischen Inhalt hat.

Auflösung. Entfernt man die Höhe mittelst des Ausdruckes für die Oberfläche, so ergiebt sich der Radius des Grundkreises = r und die Seite des Kegels = 3r. Daher theilen sich Grundfläche und Mantel des Maximums in die gegebene Fläche so, daß jene $\frac{1}{4}$ (einen Normalkreis) und dieser $\frac{3}{4}$ derselben beträgt. Die Form des Kegels ist aus dem leicht zu construirenden Axendreiecke zu erkennen.

4. Unter allen Kegeln von gleichem Mantel, welcher gleich der Kugeloberfläche vom Radius r ist, denjenigen zu berechnen, welcher den größten kubischen Inhalt hat.

Auflösung. Hier findet man den Radius des Grundkreises $= 2r \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ oder zur geometrischen Construction $= 2\sqrt{r \sqrt{\frac{1}{3} r \cdot r}}$ Derselbe verhält sich zur Höhe wie Seite und Diagonale eines Quadrates; deshalb stehen die Quadrate des Radius, der Höhe und der Seite des Kegels in dem Verhältniß 1 : 2 : 3.

5. Unter allen graden Kegeln von gleichem körperlichen Inhalte, welcher als Kugel vom Radius r gegeben ist, denjenigen zu ermitteln, welcher den kleinsten Mantel hat.

Auflösung. Hier ist es bequemer, den Radius des Grundkreises zu eliminiren. Man findet die Höhe gleich dem Durchmesser der gegebenen Kugel. Der Kegel hat dieselbe Gestalt wie das Maximum der vorhergehenden Aufgabe.

Anmerkung. Die Bestimmung desjenigen von diesen Kegeln, welcher die kleinste Oberfläche hat, s. §. 19. Nr. 2.

6. Von Kugeln, deren Radius x alle nur möglichen Werthe annimmt, denke man sich Segmente von der Größe abgeschnitten, daß ihre Oberfläche (also Mantel und Grundkreis zusammengenommen) stets so groß ist, wie der Mantel eines Cylinders, welcher durch Umdrehung eines Quadrates von der Seite a um die durch seinen Diagonalendurchschnittspunkt senkrecht zu zwei Seiten gezogene Mittellinie entstanden ist. Welches ist diejenige Kugel, die das größte Segment liefert; und wie groß ist die Höhe desselben?

Auflösung. Der Ausdruck für die vorgeschriebene Oberfläche zieht sich zusammen in

$$\pi a^2 = \pi (4xy - y^2)$$

wo y die Höhe des Segmentes bedeutet, und giebt den Radius

$$x = \frac{a^2}{4y} + \frac{y}{4}.$$

Setzt man diesen Werth in die Formel für den Inhalt des Segmentes

$$S = \frac{\pi}{3} y^2 (3x - y)$$

ein, so findet man leicht $y = a$ und $x = \frac{a}{2}$. Die Höhe des gesuchten Segmentes ist also gleich dem Durchmesser seiner Kugel geworden; d. h. die gegebene Oberfläche umschließt beim Maximum eine vollständige Kugel, und zwar von der Größe, daß sie sich in den gegebenen Cylinder einschreiben ließe.

7. Schneidet man nun von den Kugeln solche Segmente ab, daß ihre Volumina stets gleich dem Inhalte jenes Cylinders sind, so wird eines von ihnen die kleinste Oberfläche haben. Wie groß ist die Höhe und der Kugelradius desselben?

Auflösung. Es ergiebt sich hier die Höhe $y = a\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ $= 1144714\,a$ und der Radius der Kugel $x = \frac{1}{2}a\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}y$. Das Minimum ist also wieder eine ganze Kugel.

§. 17.

1. Welches ist das Minimum der um einen Kreis beschriebenen gleichschenkeligen Dreiecke?

Auflösung. (Fig. 17.) $\triangle ADB \sim \triangle MEG$, so ist $u = \frac{y}{x}v$, also

$$D = uv = \frac{y}{x}v^2$$

Ferner ist auch $\triangle AGM \sim \triangle MEG$, also

$$v - r : r = r : y \text{ mithin } y = \frac{r^2}{v - r}$$

und deshalb

$$x = \sqrt{r^2 - y^2} = \frac{r}{v - r}\sqrt{v^2 - 2rv}$$

$$\text{also } D = \frac{rv^2}{\sqrt{v^2 - 2rv}} = r\sqrt{\frac{v^3}{v - 2r}}$$

folglich $v = 3r$ und man hat $AB = 2r\sqrt{3} = BC$, also ist das gleichseitige Dreieck das kleinste. S. §. 14. Nr. 2. Zusatz.

2. Welches von diesen Dreiecken hat die kleinsten Schenkel?

Auflösung. Δ ADB $\sim$ ΔMEG, $s = r\frac{v}{x}$. Aus obiger Proportion $v - r : r = r : y$ hat man $v = \frac{r}{y}(r + y)$ mithin

$$s = \frac{r^2}{y} \cdot \frac{r + y}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{r^2}{y} \sqrt{\frac{r + y}{r - y}}.$$

woraus $y^2 + ry - r^2 = 0$, also $y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} r$

(da y nicht negativ sein kann). Dieser Ausdruck lehrt, daß y gleich der Seite des in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Zehnecks ist. Man findet also den Berührungspunkt des kleinsten Schenkels, wenn man den Radius MF nach dem goldenen Schnitte theilt und durch J eine Parallele mit BC zieht.

3. Welches von diesen Dreiecken hat den kleinsten Umfang?

Auflösung:

$$U = 2(s + u) = 2\frac{v}{x}(r + y) = 2v\sqrt{\frac{r+y}{r-y}} = 2v\sqrt{\frac{v}{v - 2r}}$$

$$U = 2\sqrt{\frac{v^3}{v - 2r}}$$

und dieser Ausdruck wird, wie in Nr. 1. gezeigt, für $v = 3r$ ein Minimum. Es hat also das gleichseitige Dreieck auch den kleinsten Umfang.

4. Um eine Kugel den kleinsten graden Kegel zu beschreiben.

Auflösung. $K = \frac{1}{3}\pi u^2 v = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot \frac{v^2}{v - 2r}$ giebt $v = 4r$. Der kleinste Kegel ist also doppelt so hoch und auch doppelt so groß, wie die Kugel. Der Durchmesser des Grundkreises und die Höhe verhalten sich wie Seite und Diagonale eines Quadrates. S. §. 14. Nr. 2. Zusatz.

5. Welcher von den einer Kugel umgeschriebenen graden Kegeln hat den kleinsten Mantel?

Auflösung. $M = \pi us = \pi r \frac{yv^2}{x^2} = \pi r \frac{v(v-r)}{v-2r}$ giebt

$$v^2 - 4rv + 2r^2 = 0, \text{ also } v = (2 \pm \sqrt{2})\, r$$

Da aber $(2 - \sqrt{2})$ ein echter Bruch ist, so würde $v < r$ sein, was unmöglich ist; daher ist die Höhe des kleinsten Mantels

$$v = (2 + \sqrt{2})\, r$$

und diese hat man gefunden, wenn man an den Durchmesser die Seite des eingeschriebenen Quadrates ansetzt.

6. Welcher von diesen Kegeln hat die kleinste Oberfläche?

Auflösung. $F = \pi u(s+u) = \pi \frac{yv^2}{x^2}(r+y) = \pi r \cdot \frac{v^2}{v-2r}$

also hat der Kegel vom kleinsten Inhalt auch die kleinste Oberfläche.

II. Abschnitt.

Aufgaben, welche die Behandlung der Differenz zweier Quadratwurzeln erfordern.

§. 18. Beispiele.

I. Welches unter den einem Kreise eingeschriebenen Rechtecken hat den größten Umfang? (Vergl. §. 13. Nr. 6.)

Auflösung. Nennt man die Hälften der Seiten x und y, so ist

$$U = 4x + 4y = 4(x + \sqrt{r^2 - x^2})$$

Man setzt also

$$x + \sqrt{r^2 - x^2} = x_1 + \sqrt{r^2 - x_1^2}$$

Nun stellt man, wie immer, die gleichartigen Glieder zusammen,

$$\sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{r^2 - x_1^2} = x_1 - x$$

und multiplizirt und dividirt die Differenz der Wurzeln mit der Summe der Wurzeln

$$\frac{(r^2 - x^2) - (r^2 - x_1^2)}{\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x_1^2}} = x_1 - x$$

oder
$$\frac{x_1^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x_1^2}} = x_1 - x$$

und kann nun wieder durch $x_1 - x$ dividiren,

$$\frac{x_1 + x}{\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x_1^2}} = 1$$

was für $x_1 = x$

$$\frac{2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = 1$$

ist, mithin $x^2 = r^2 - x^2$

also $x = r\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ und auch $y = r\sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

Es ist wieder das Quadrat.

Zusatz. Ebenso ist die Auflösung der entsprechenden Aufgabe für die Ellipse. Man findet

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ und } y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Die Construction ist: man fälle vom Mittelpunkte ein Loth auf eine Scheitelsehne, so theilt es dieselbe in die verlangten Stücke x und y. Der Umfang des Maximums ist also gleich dem Umfange des durch die Scheitel der Ellipse bestimmten Rhombus.

II. Welche unter allen einer gegebenen Linie parallelen Sehnen eines Kreises liefert als Grundlinie das größte unter den Dreiecken, die ihre Spitzen in einem beliebig gegebenen Punkte haben?

Auflösung. Wir unterscheiden in der Lage des Punktes zwei Fälle. Die durch ihn in der gegebenen Richtung gezogene Linie kann entweder den Kreis schneiden, oder nicht. Liegt der Punkt außerhalb des Kreises so, daß diese Linie den

Kreis gar nicht trifft, oder ihn nur berührt: so kann, wenn wir auch durch den Mittelpunkt eine der gegebeuen Linie parallele Grade ziehen, in dem Halbkreise, welcher zwischen den beiden eben gezogenen Parallelen liegt, keine Sehne Grundlinie des größten Dreiecks sein. In dem andern Halbkreise habe irgend eine Sehne, $2y$, einen Abstand x vom Mittelpunkte, und nun ist, wenn wir die bekannte Entfernung des gegebenen Punktes von der durch den Mittelpunkt gezogenen Parallelen mit m bezeichnen, der Inhalt eines solchen Dreiecks

$$D = (x + m)\, y = (x + m)\sqrt{r^2 - x^2}$$

Wollte man nun hier, wie sonst, die Wurzel fortschaffen, und aus $(x^2 + 2mx + m^2)(r^2 - x^2)$ das x des Maximums suchen, so würde man eine complicirte kubische Gleichung aufzulösen haben. Dies umgeht man, wenn man die Klammer auflöst:

$$x\sqrt{r^2 - x^2} + m\sqrt{r^2 - x^2} = x_1\sqrt{r^2 - x_1^2} + m\sqrt{r^2 - x_1^2}$$

oder geordnet

$$m\left(\sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{r^2 - x_1^2}\right) = x_1\sqrt{r^2 - x_1^2} - x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Erweitert man mit der Summe der Wurzelausdrücke, so folgt

$$m \cdot \frac{(r^2 - x^2) - (r^2 - x_1^2)}{\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x_1^2}} = \frac{x_1^2(r^2 - x_1^2) - x^2(r^2 - x^2)}{x_1\sqrt{r^2 - x_1^2} + x\sqrt{r^2 - x^2}}$$

oder

$$m \cdot \frac{x_1^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x_1^2}} = \frac{r^2(x_1^2 - x^2) - (x_1^4 - x^4)}{x_1\sqrt{r^2 - x_1^2} + x\sqrt{r^2 - x^2}}$$

wenn man nun durch $x_1^2 - x^2$ dividirt, und $x_1 = x$ setzt, so erhält man

$$\frac{m}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r^2 - 2x^2}{2x\sqrt{r^2 - x^2}}$$

hier hebt sich $2\sqrt{r^2 - x^2}$ von beiden Seiten fort, und es ist

$$mx = r^2 - 2x^2$$

Man findet also aus

$$x^2 + \frac{m}{2}x = \frac{r^2}{2}$$

$$x = -\frac{m}{4} + \sqrt{\left(\frac{m}{4}\right)^2 + \frac{r^2}{2}}$$

wo vor der Wurzel das Minuszeichen weggelassen ist, weil der Abstand x nicht negativ sein kann. Die Construction dieses Ausdruckes ist leicht.

Für den speciellen Fall, daß die durch den gegebenen Punkt gezogenen Parallele den Kreis berührt, wo also $m = r$ ist, wird aus demselben

$$x = \frac{r}{2}$$

was, wenn der gegebene Punkt der Berührungspunkt selbst ist, lehrt, daß das Maximum der einem Kreise eingeschriebenen gleichschenkeligen Dreiecke gleichseitig ist. (Vergl. §. 23. Nr. 1.)

Schneidet aber die Parallele den Kreis, so enthält jeder der beiden dadurch entstandenen Theile des Kreises ein Maximum. Das größere Segment enthält den obigen Fall; für das kleinere findet sich aus

$$D = (x - m)\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$x = \frac{m}{4} + \sqrt{\left(\frac{m}{4}\right)^2 + \frac{r^2}{2}}$$

Geht die Parallele hierbei durch den Mittelpunkt, so erscheint die Aufgabe §. 13. Nr. 1.

Anmerkung. Ebenso ist die Auflösung der Aufgabe bei der Ellipse für die einer Axe parallelen Sehnen; auch bei der Hyperbel, nur muß bei dieser der Punkt außerhalb des Stückes der Ebene, welches zwischen den Scheiteltangenten der Hyperbel liegt, sich befinden.

§. 19.

1. Unter allen dreikantigen graden Prismen von der Höhe H, bei welchen eine Seitenfläche und die Grundfläche die Inhalte F und G haben, dasjenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat.

Auflösung. Da das Rechteck vom Inhalte F die Höhe

H hat, so ist seine Grundlinie auch bestimmt $= \frac{F}{H}$, und kann deshalb mit a bezeichnet werden. Es sei dies die Seite BC des Dreiecks ABC. Der Inhalt desselben ist aber gleichfalls bekannt; folglich ist auch die zu BC gehörige Höhe AD = h eine nicht zu verändernde Länge. Nennt man nun AB x, AC y und BD z, so ist die Oberfläche

$$M = 2G + F + H(x + y)$$

folglich muß $x + y$ ein Minimum werden. Es ist aber

$$x + y = \sqrt{h^2 + z^2} + \sqrt{h^2 + (a - z)^2}$$

und daher hat man

$$\sqrt{h^2 + z^2} - \sqrt{h^2 + z_1^2} = \sqrt{h^2 + (a - z_1)^2} - \sqrt{h^2 + (a - z)^2}$$

woraus hervorgeht

$$\frac{z^2}{h^2 + z^2} = \frac{(a - z)^2}{h^2 + (a - z)^2}.$$

Kehrt man beide Brüche um, und dividirt die Summanden der neuen Zähler einzeln, so vereinfacht sich die Gleichung in

$$\frac{h^2}{z^2} + 1 = \frac{h^2}{(a - z)^2} + 1$$

mithin

$$z = a - z$$

also $z = \frac{1}{2}a$ und daher $x = y$.

Die beiden veränderlichen Seitenflächen sind bei dem Minimum congruente Rechtecke.

2. Unter allen graden Kegeln von gleichem Volumen, welches als eine Kugel mit dem Radius r gegeben ist, denjenigen zu finden, welcher die kleinste Oberfläche hat. (§. 16. Nr. 4 und 5.)

Auflösung. In dem Ausdrucke für die Oberfläche (wenn x Radius des Grundkreises und y die Höhe ist)

$$F = \pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2}$$

kann man mit Hülfe der Gleichung für den gegebenen Inhalt

$$\frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{4}{3}\pi r^3$$

am bequemsten y durch x ersetzen. Nach Umformung der Gleichung

$$\sqrt{x^4 + \frac{16r^6}{x^2}} - \sqrt{x_1^4 + \frac{16r^6}{x_1^2}} = x_1^2 - x^2$$

läßt sich, da man $\frac{16r^6}{x^2} - \frac{16r^6}{x_1^2}$ in $\frac{16r^6\,(x_1^2 - x^2)}{x^2 x_1^2}$ zusammenzieht, sogleich durch $x_1^2 - x^2$ dividiren. Man gelangt zu dem Resultate

$$x = r\sqrt[6]{2} = 1{,}12246\,r$$

die Höhe $y = 2r\sqrt[3]{4}$. Da die Seite des Kegels

$$s = 3r\sqrt[6]{2} = 3x$$

wird, so ist die Form des Kegels ersichtlich.

3. Unter den einer Kugel eingeschriebenen graden Kegeln denjenigen zu ermitteln, welcher die größte Oberfläche hat.

Auflösung. Ersetzt man, wie in §. 15. Nr. 3., den Radius des Grundkreises x durch die Höhe des Kegels y, so wird man nach den nöthigen Umformungen zu der Bestimmungsgleichung geführt

$$y^2 - \tfrac{23}{8}ry + 2r^2 = 0$$

aus welcher $y = \frac{23 \pm \sqrt{17}}{16}\,r$

hervorgeht. Allein es kann hier das positive Zeichen vor der Wurzel nicht gelten; denn der Mantel ist (nach §. 15. Nr. 4.) ein Maximum, wenn $y = \frac{4}{3}r$ ist; und unser y ist

$$y = \frac{23 + \sqrt{17}}{16}\,r > \frac{23 + 4}{16}\,r > \frac{4}{3}\,r;$$

der Mantel ist also an dieser Stelle, ebenso wie der dem Mittelpunkte sich nähernde Grundkreis, noch im Zunehmen begriffen. Die Oberfläche kann darum erst bei

$$y = \frac{23 - \sqrt{17}}{16}\,r = 1{,}179806\,r$$

und $\qquad x = 0{,}983702\,r$

ihr Maximum erreichen. Um y bequemer zu construiren kann man schreiben

$$y = \tfrac{3}{2}r - \tfrac{1}{4}\left[\frac{r}{4} + \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{4}\right)^2}\right].$$

III. Abschnitt.

Anwendung trigonometrischer Functionen.

§. 20. Beispiele.

I. Vom Scheitel eines rechten Winkels BAC (wie in Fig. 18.) ist eine der Größe nach gegebene Linie $AD = a$ gezogen und auf die Schenkel projicirt. Dreht sich die Linie a in der Ebene des Winkels um den Scheitel, so verändert sich das Rechteck ABDC seinem Inhalte nach von Null zu- und abnehmend bis wieder zu Null; seinem Umfange nach von 2a bis zurück nach 2a. Daher die Aufgabe:

Unter den Rechtecken mit gegebener Diagonale das Maximum des Inhaltes und das des Umfanges zu bestimmen.

Auflösung. Der Inhalt des Rechtecks, $R = xy$, wird, wenn wir den Winkel DAB mit φ bezeichnen,

$$R = a^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

wofür man mit Anwendung der Formel $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$ schreiben kann

$$R = \tfrac{1}{2} a^2 \sin 2\varphi$$

Diese Function R verändert sich nur durch den Winkel 2φ. Sie wird also ein Maximum, wenn der $\sin 2\varphi$ seinen größten Werth, nämlich 1, erreicht. Darum ist für das Maximum

$$2\varphi = 90^\circ$$

mithin

$$\varphi = 45^\circ.$$

Die gegebene Linie halbirt also den rechten Winkel, und das größte Rechteck ist ein Quadrat.

Der Umfang ist

$$U = 2(x + y) = 2a(\cos\varphi + \sin\varphi)$$

wofür man bekanntlich schreiben kann

$$U = 2a \sin(45^\circ + \varphi)\sqrt{2}.$$

Wiederum muß

$$45 + \varphi = 90^\circ$$

also

$$\varphi = 45^\circ$$

sein. Demnach hat das Quadrat das Maximum des Inhaltes und Umfanges.

II. Dreht sich das Rechteck ABDC um seine Mittellinie, so beschreibt es einen graden Cylinder. Es soll dasjenige Rechteck ermittelt werden, welches bei der Rotation den Cylinder mit der größten Oberfläche beschreibt. Alle diese Rechtecke liegen in einem Kreise mit dem Durchmesser a; darum kann die Aufgabe auch so ausgesprochen werden:

In eine Kugel den Cylinder mit größter Oberfläche einzuschreiben. (§. 13. Nr. 7.)

Aufl. $F = 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi + x\pi y = \pi a^2 \left(\frac{1}{2}\cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\right)$

$$F = \tfrac{1}{2}\pi a^2 (\cos^2\varphi + \sin 2\varphi)$$

Ist bei dem hier gedachten Rechtecke ABDC der Winkel φ nicht weit von 90^0 entfernt, so ist der Cylinder hoch, und es wird jenseit des Maximums einen flachen, aber dabei weiten Cylinder geben, welcher ebenso große Oberfläche hat. Bei diesem wird der Winkel φ_1 eine ganz andere Größe haben. Für je zwei solche Cylinder ist also

$$\tfrac{1}{2}\pi a^2 (\cos^2\varphi + \sin 2\varphi) = \tfrac{1}{2}\pi a^2 (\cos^2\varphi_1 + \sin 2\varphi_1)$$

woraus durch Zusammenstellen der entsprechenden Glieder hervorgeht

$$\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1 = \cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi.$$

Da wir die Differenz $\varphi - \varphi_1$ bilden und dann durch Division entfernen müssen, so verändern wir in der Gleichung

$$\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1 = (\cos\varphi_1 - \cos\varphi)(\cos\varphi_1 + \cos\varphi)$$

nur die Differenzen, nicht aber die Summe $(\cos\varphi_1 + \cos\varphi)$, indem wir die Formeln

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

anwenden. Wir erhalten

$$2\cos(\varphi+\varphi_1)\sin(\varphi-\varphi_1)=2\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi_1}{2}(\cos\varphi_1+\cos\varphi)$$

Nun dividiren wir beide Seiten durch den Bogen $(\varphi - \varphi_1)$ und setzen $\varphi - \varphi_1$ unter die Sinus, welche $\varphi - \varphi_1$ enthalten,

$$2\cos(\varphi+\varphi_1)\cdot\frac{\sin(\varphi-\varphi_1)}{\varphi-\varphi_1}=2\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}{\varphi-\varphi_1}(\cos\varphi_1+\cos\varphi)$$

Wenn wir nun auf der rechten Seite dieser Gleichung die voranstehende 2 unter den Bogen $\varphi - \varphi_1$ bringen, indem wir auf dieser Seite Zähler und Nenner durch 2 dividiren,

$$2\cos(\varphi+\varphi_1)\cdot\frac{\sin(\varphi-\varphi_1)}{\varphi-\varphi_1}=\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}{\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}(\cos\varphi_1+\cos\varphi)$$

so haben wir auf jeder Seite einen Sinus, dividirt durch seinen Bogen.

Betrachten wir nun die Cylinder, wie sie sich dem Maximum von beiden Seiten nähern, so sehen wir, wie die Differenz zwischen φ und φ_1 immer geringer wird. Geht aber $(\varphi - \varphi_1)$ mehr und mehr in Null über, so haben wir in

$$\frac{\sin(\varphi-\varphi_1)}{\varphi-\varphi_1} \text{ und } \frac{\sin\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}{\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}$$

die Quotienten aus Sinus und Bogen für den Fall, daß der Bogen unendlich klein wird.

Solcher Quotient ist aber gleich Eins.

Denn aus Fig. 19, wo der Kreis um M den Radius 1 hat, ist ersichtlich, daß $BCD < BAD$, d. h. $2 \sin\alpha < 2\alpha$. Ferner $ABF < AE + EF$, d. h. $2\alpha < 2 \tan\alpha$; mithin

$$\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$$

Dividirt man mit dieser Ungleichung in

$$\sin\alpha = \sin\alpha = \sin\alpha,$$

so folgt

$$1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha$$

Je näher α der Null kommt, desto mehr geht von den Grenzen 1 und $\cos\alpha$, zwischen welchen der Quotient $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ liegt, auch die rechts stehende in 1 über. Dies muß folglich auch mit $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ der Fall sein; d. h.

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1, \text{ wenn } \alpha \text{ unendlich klein ist.}$$

Es geht also, wenn $(\varphi - \varphi_1)$ verschwindend klein wird, $\frac{\sin(\varphi - \varphi_1)}{\varphi - \varphi_1}$ und $\frac{\sin\frac{\varphi - \varphi_1}{2}}{\frac{\varphi - \varphi_1}{2}}$ in 1 über, und wir haben dann

$$2\cos(\varphi + \varphi_1) = \sin\frac{\varphi + \varphi_1}{2}(\cos\varphi_1 + \cos\varphi)$$

Wollen wir aber das Maximum haben, so müssen wir φ und φ_1 völlig gleich setzen:

$$2\cos 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

oder

$$2\cos 2\varphi = \sin 2\varphi$$

woraus sich der gesuchte Werth sofort bestimmt, wenn wir durch $\cos 2\varphi$ dividiren,

$$\operatorname{tang} 2\varphi = 2$$

was

$$2\varphi = 63^\circ\ 26'\ 5,''8$$

also

$$\varphi = 31^\circ\ 43'\ 2,''9$$

ergiebt, aber auch durch Construction sich leicht darstellt, indem man auf AB (Fig. 18) eine beliebige Strecke, AF, abträgt, und in F einen Perpendikel FG = 2 AF errichtet, A mit seinem Endpunkte G verbindet, so ist der Winkel GAF $= 2\varphi$; u. s. w.

Haben wir nun auch durch die Construction des Rechtecks, welches den Cylinder mit größter Oberfläche liefert, eine Vorstellung von der Gestalt desselben gewonnen, so veranlaßt doch die Größe des Winkels φ von $31^\circ\ 43'\ 2,''9$, weil dieselbe nicht, wie gewöhnlich, eine runde Zahl von Graden ist,

zu untersuchen, ob nicht tang φ d. h. $\frac{y}{x}$ doch ein Verhältniß mit besonderen Eigenschaften ist. Wir erhalten diesen Werth aus der Formel

$$\tang 2\varphi = \frac{2 \tang \varphi}{1 - \tang^2 \varphi}$$

wobei zu Abkürzung z für tang φ geschrieben werden möge. Wir haben also für das Maximum

$$2 = \frac{2 z}{1 - z^2}.$$

Dies giebt aus $z^2 + z = 1$

$$z = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

Das Minuszeichen darf hier vor der Wurzel nicht stehen, weil z d. h. tang φ nie negativ wird, indem φ nur bis 90° wachsen kann.

Dieser Ausdruck $z = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ ist aber derselbe, welchen man für die Seite des regelmäßigen Zehnecks im Kreise mit dem Radius 1 erhält. Demnach ist der Cylinder mit größter Oberfläche so gestaltet, daß sich seine Höhe zum Durchmesser des Grundkreises verhält, wie die Seite des regelmäßigen Zehnecks zum Radius des umgeschriebenen Kreises.

Man construirt folglich das Rechteck auch, indem man eine beliebige Linie nach dem goldenen Schnitte theilt, den größeren Abschnitt auf einem Endpunkte als Perpendikel errichtet, die Hypotenuse zieht, auf derselben die gegebene Linie a abträgt und durch Parallelen mit den Katheten das gesuchte Rechteck vollendet.

III. Nun denke man sich statt der Schenkel des rechten Winkels in Nr. I. (Fig. 18.) zwei Ebenen, die auf einander senkrecht stehen und statt der gegebenen Linie AD ein Quadrat, welches mit einer Seite in der Kante des Raumwinkels befestigt ist und sich innerhalb dieses Winkels wie eine Thür bewegt. Dasselbe werde in jeder Lage auf die Ebenen pro-

jicirt. Dadurch entstehen rechtwinkelige Parallelepipeda. Es soll dasjenige aufgesucht werden, in welchem die Summe der vier Seitenflächen ein Maximum ist.

Auflösung. $S = 2xy + 2ay$

$$S = a^2 (\sin 2\varphi + 2 \sin \varphi)$$

Entwickelt man die Gleichung

$$(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1) + 2(\sin \varphi - \sin \varphi_1) = 0$$

ebenso, so hat man

$$\cos 2\varphi = -\cos \varphi = \cos (180^\circ - \varphi)$$

$$2\varphi = 180^\circ - \varphi \text{ also } \varphi = 60^\circ.$$

Das Maximum ist also ein Parallelepipedon, dessen Grundfläche eine Hälfte des gegebenen Quadrats ist.

IV. Bei welchem von diesen Parallelepipeden ist die Oberfläche am größten?

Auflösung. $F = 2a^2 (\cos \varphi + \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi)$. Es führt

$$(\sin \varphi - \sin \varphi_1) + \tfrac{1}{2}(\sin 2\varphi \quad \sin 2\varphi_1) = \cos \varphi_1 - \cos \varphi$$

bei derselben Behandlung auf die Gleichung

$$\cos \varphi - \sin \varphi + \cos 2\varphi = 0$$

deren Auflösung gelingt, wenn man $\sin (45^\circ - \varphi) \sqrt{2}$ statt $\cos \varphi - \sin \varphi$ schreibt, und nun den Cosinus auch in einen Sinus verwandelt

$$\cos 2\varphi = \sin (90^\circ - 2\varphi) = \sin 2(45^\circ - \varphi)$$

Es lautet also nun die Gleichung

$$\sin (45^\circ - \varphi) \sqrt{2} + \sin 2(45^\circ - \varphi) = 0.$$

Zerlegt man $\sin 2(45^\circ - \varphi) = 2 \sin (45^\circ - \varphi) \cos (45^\circ - \varphi)$, so kann man $\sin (45^\circ - \varphi)$ als gemeinsamen Factor absondern

$$\sin (45^\circ - \varphi) [\sqrt{2} + 2 \cos (45^\circ - \varphi)] = 0.$$

Daher kann 1)

$$\sin (45^\circ - \varphi) = 0,$$

also $45^\circ - \varphi = 0$, $\varphi = 45^\circ$ sein;

oder auch 2)

$$\sqrt{2} + 2 \cos (45^\circ - \varphi) = 0$$

Dies würde jedoch ergeben

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = - \cos (45° - \varphi)$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \cos (180° - 45° + \varphi)$$

und $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist cos 45°, aber auch cos 315°, also

$$\cos 315° = \cos (135 + \varphi)$$

daher

$$315° = 135° + \varphi$$

$$\varphi = 180°$$

was nicht möglich ist.

Bei dem Maximum ist also $\varphi = 45°$, und darum sind in ihm die Seitenfiguren, in welchen die Seite des gegebenen Quadrates eine Diagonale ist, auch Quadrate; und die vier andern Begrenzungsflächen congruente Rechtecke.

§. 21.

Uebungsaufgaben für das Beispiel §. 20. Nr. I.

1. Einen Winkel α in einen Kreis als Peripheriewinkel so einzutragen, daß die Summe der von den Schenkeln abgeschnittenen Sehnen ein Maximum ist.

Auflösung. Legt man den gegebenen Winkel α mit dem Scheitel auf die Peripherie und zwar zuerst so, daß beide Schenkel außerhalb des Kreises liegen, und dreht den Winkel nun um den Scheitel in den Kreis hinein, so wird, so lange der Mittelpunkt noch nicht zwischen den Schenkeln des Winkels liegt, die Summe der Sehnen durch Vergrößerung beider zunehmen. Wir werden also unsere Untersuchung erst da anfangen lassen, wenn eine Sehne wieder kleiner wird, d. i. wenn sie über den Mittelpunkt hinweggegangen ist. Es zerschneidet also der Durchmesser, welcher sich vom Scheitel aus ziehen läßt, den Winkel α in die Stücke φ und $(\alpha - \varphi)$, so daß die Summe

$$S = 2r\,[\cos \varphi + \cos (\alpha - \varphi)]$$

der Ausdruck ist, welcher zu einem Maximum gemacht werden soll. Formt man ihn um, indem man die Summe der Co-

sinus in ein Product zusammenzieht, so zeigt sich sofort, daß $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ sein muß.

2. Soll das Product der Sehnen ein Maximum werden, so zerlege man das Product der Cosinus in eine Summe zweier Cosinus mit Hülfe der Formel

$$\cos(u + v) + \cos(u - v) = 2 \cos u \cos v$$

dann ergiebt sich wieder $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. (Vergl. §. 4. Nr. 3.)

3. Unter den Vierecken, die einen gegebenen Winkel 2α haben und nicht nur einem gegebenen Kreise umgeschrieben sind, sondern auch die Bedingung erfüllen, daß sich um jedes ein Kreis beschreiben lasse, das Maximum und das Minimum zu finden.

Erläuterung. Ist der Kreis um M (Fig. 20.) der gegebene, so ziehe man an denselben zwei Tangenten, VA und WA, die den gegebenen Winkel 2α bilden. Die Bedingung, daß auch um die zu construirenden Vierecke sich Kreise beschreiben lassen sollen, fordert weiter nichts, als daß der dem Winkel A gegenüberliegende Winkel BCD gleich dem Nebenwinkel von 2α sei. Schiebt man solchen Winkel BCD $= 180^\circ - 2\alpha$ um den Kreis herum, so daß seine Schenkel CK und CL an der Peripherie hingleiten, so sieht man, bei gehöriger Verlängerung der Schenkel bis zum Durchschnitt mit den Schenkeln des gegebenen Winkels VAW, alle Vierecke, von welchen unsere Aufgabe redet. Dabei bemerkt man, daß zwei Fälle zu unterscheiden sind. Wenn nämlich der Winkel BCD sich an dem größeren der durch die Berührungspunkte der gegebenen Tangenten, H und J, begrenzten Bogen, JKLH, hinbewegt, so liegt der gegebene Kreis innerhalb des Vierecks ABCD, und dasselbe wird immer größer, je näher der Scheitel C den Tangenten AV und AW rückt. Läuft aber der Winkel $(180^\circ - 2\alpha)$ an dem kleineren Bogen JOPH entlang, so liegt der Kreis, für welchen, wie die Aufgabe fordert, die Vier-

ecksseiten Tangenten sein sollen, außerhalb desselben; und hier wird das Viereck AEFG, je näher der herumgeführte Scheitel F den Tangenten AV und AW kommt, immer kleiner. Es muß also unter den großen Kreisvierecken, wie ABCD, ein Minimum, und unter den kleinen, von denen AEFG eines ist, ein Maximum geben.

Auflösung. Bezeichnen wir den veränderlichen Viereckswinkel D mit 2φ, so ist der vierte Winkel B $180^\circ - 2\varphi$. Da

$$\Delta\, AMH = \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{cotg} \alpha,$$

so ist das an der Ecke A liegende Vierecksstück $AJMH = r^2 \operatorname{cotg} \alpha$, und das an der Ecke C

$$CLMK = r^2 \operatorname{cotg} \frac{180^0 - 2\alpha}{2} = r^2 \operatorname{tang} \alpha$$

Darum ist der Inhalt des Vierecks ABCD

$$V = r^2 (\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi)$$

was sich zusammenziehen läßt in

$$V = 2r^2 \left(\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\varphi}\right)$$

Das Viereck AEFG erhält man, wenn man von AJMH zuerst MJEP wegnimmt, dann MOFP wieder hinzulegt und endlich MOGH abzieht; also

$$v = r^2 (\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{cotg} \varphi + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi)$$

$$v = 2r^2 \left(\frac{1}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{\sin 2\varphi}\right)$$

Für $2\varphi = 90^0$ ist die Function V am kleinsten, weil es dann der Bruch $\frac{1}{\sin 2\varphi}$ ist, und die Function v am größten, weil dann von $\frac{1}{\sin 2\alpha}$ am wenigsten abgezogen wird.

Maximum und Minimum sind also diejenigen Kreisvierecke, in welchen die beiden nicht gegebenen Winkel rechte sind. Man findet sie, wenn man auf den Tangenten AV und AW von den Berührungspunkten aus den Radius nach beiden Seiten abträgt und von hier aus Tangenten an den Kreis zieht.

4. Dieser Aufgabe entsprechend sind folgende beiden zu behandeln:

Unter allen Vierecken, welche zwei gegebene Winkel enthalten, und einem gegebenen Kreise so umschrieben sind, daß dieser ganz innerhalb liegt, das kleinste zu finden.

Erläuterung. Ist außer dem Winkel A (Fig. 20.) auch der auf ihn folgende Winkel $B = 2\beta$ gegeben, so kann sich nur die Seite CD des Vierecks ABCD zwischen den Tangenten BU und AW bewegen, indem ihr Berührungspunkt L auf dem Bogen KLH fortschreitet.

Auflösung:

$$V = r^2 [\cot g\, \alpha + \cot g\, \beta + \cot g\, \varphi - \cot g\, (\alpha + \beta + \varphi)]$$

$$V = r^2 \left[\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} + \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta + \varphi) \sin \varphi}\right]$$

verwandelt man den allein veränderlichen Nenner $\sin(\alpha + \beta + \varphi) \sin \varphi$ in eine Differenz zweier Cosinus, so sieht man, daß er in seinem Maximum

$$\cos(\alpha + \beta) + 1$$

lautet, woraus sich

$$2\,\varphi = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

ergiebt; so daß wieder die beiden unbestimmten Winkel einander gleich sein müssen.

Dasselbe ist der Fall, wenn der zweite gegebene Winkel dem ersten gegenüber liegen soll; dann ist die allgemeine Betrachtung ganz wie in der vorgehenden Aufgabe bei dem Viereck ABCD.

5. Unter den Vierecken, welche einen gegebenen Winkel 2α und einen gegebenen Umfang $2s$ haben und zugleich der Bedingung genügen, daß sowohl in als um jedes derselben Kreise beschrieben werden können, das größte zu finden.

Auflösung. Heißt der Radius eines solchem Vierecke eingeschriebenen Kreises x, so hat man

$$V = s \cdot x$$

und dazu $x(\cot\alpha + \operatorname{tg}\alpha + \cot\varphi + \operatorname{tg}\varphi) = s.$
Es müssen die beiden veränderlichen Winkel wieder rechte sein.

§. 22.

Nach der Methode §. 20. Nr. II. und III. zu lösen:

1. Wo liegen die Ecken des größten unter den Rechtecken, welche einem gegebenen Kreissector so eingeschrieben werden können, daß zwei Seiten der Halbirungslinie des Centriwinkels parallel laufen?

Auflösung. Ist der Centriwinkel des gegebenen Sectors 2α und φ der Winkel, welchen der nach einer im Bogen liegenden Ecke gezogene Radius mit der Halbirungslinie des Winkels 2α bildet, so läßt sich der Abstand der dem Mittelpunkte nächsten Rechteckseite, da diese $2 \cdot r \sin\varphi$ ist, ausdrücken durch $r \sin\varphi \cdot \cot\alpha$; folglich ist die der Halbirungslinie parallele Seite $r\cos\varphi - r\sin\varphi \cot\alpha$; mithin der Inhalt

$$R = r^2 [2\sin\varphi\cos\varphi - 2\sin^2\varphi \cot\alpha]$$

Führt man nun hier den doppelten Winkel ein,

$$R = r^2 [\sin 2\varphi - (1 - \cos 2\varphi)\cot\alpha)$$

so ergiebt sich leicht

$$\cot 2\varphi = \cot\alpha$$

mithin $$\varphi = \frac{\alpha}{2};$$

d. h. die in dem Bogen liegenden Ecken befinden sich in der Mitte seiner Hälften.

Zusatz. Der Inhalt des Maximums hat den einfachen Ausdruck $M = r^2 \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$. Hätte man den aus $\cot 2\varphi = \cot\alpha$ abzuleitenden Werth $2\varphi = 180^0 + \alpha$ für den gegebenen Sector, der kleiner als ein Halbkreis ist, auch wählen können? Ein negativer größter Werth ist ein Minimum der Function.

2. Welche Sehne eines Kreises giebt mit einer gegebenen Sehne als parallele Seiten das größte Trapez?

Auflösung. Man betrachte zuerst ein Trapez, welches dem kleineren der durch die gegebene Sehne abgeschnittenen

Segmente eingeschrieben ist. Bezeichnet man den auf der gegebenen Sehne stehenden Centriwinkel mit 2α, den auf der verschiebbaren, ihr parallelen Sehne mit 2φ, so sieht man, nachdem man vom Mittelpunkte auf die parallelen Seiten einen Perpendikel gefällt hat, daß der Inhalt des Trapezes

$$T = r^2 (\sin\varphi + \sin\alpha)(\cos\varphi - \cos\alpha)$$

oder
$$T = \frac{r^2}{2} [\sin 2\varphi + 2\sin(\alpha - \varphi) - \sin 2\alpha]$$

woraus man findet

$$\varphi = \frac{\alpha}{3}.$$

Ebenso ergiebt sich für das dem größeren Segmente eingeschriebene Trapez

$$\varphi = \frac{180^0 - \alpha}{3}$$

Bei den beiden Maximis theilen also die Endpunkte der zweiten Parallele den Bogen in drei gleiche Theile.

3. Welches ist das größte unter den Dreiecken, die mit ihrer Spitze im Mittelpunkte eines Kreises liegen und deren Grundlinien Sehnen sind, welche sich in einem außerhalb oder innerhalb des Kreises gegebenen Punkte schneiden?

1. Auflösung. Wir ziehen von dem außerhalb des Kreises gegebenen Punkte eine Secante und bezeichnen das innerhalb des Kreises liegende Stück derselben mit $2y$, und die auf dieser Grundlinie stehende Höhe mit x, so ist

$$D = x\sqrt{r^2 - x^2}$$

weshalb $x = r\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ und auch $y = r\sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Das Maximum ist also ein rechtwinkeliges Dreieck, und zwar ein Quadrant des eingeschriebenen Quadrates. Um dasselbe zu construiren, braucht man nur mit der mittleren Proportionale zwischen $\frac{1}{2}r$ und r einen concentrischen Kreis zu beschreiben und an diesen vom gegebenen Punkte eine Tangente zu ziehen, so steht auf dem Theile derselben, welcher Sehne des gegebenen Kreises ist, das gesuchte Maximum.

Allein hier fällt auf, daß dieses Maximum unmöglich ist, wenn der Punkt so weit im Innern des gegebenen Kreises liegt, daß er sich noch innerhalb des mit der mittleren Proportionale zwischen $\frac{1}{2}$r und r beschriebenen Kreises befindet. Gleichwohl muß es auch für diese Lage ein Maximum der betrachteten Dreiecke geben; doch ist eine Entscheidung hierüber in obiger algebraischen Entwickelung nicht zu finden. Der Grund davon, daß die Analysis hier die Antwort verschweigt, ist der, daß der Abstand des gegebenen Punktes vom Mittelpunkte gar nicht in die Rechnung eingetreten ist. Wir werden also darauf hingewiesen, die Aufgabe anders zu behandeln.

2. Auflösung. Nennt man φ den Winkel, welchen eine Sehne mit der vom gegebenen Punkte nach dem Mittelpunkte gezogenen Linie m bildet, so ist der Inhalt des Dreiecks

$$D = m \sin\varphi \sqrt{r^2 - m^2 \sin^2\varphi}$$

Zur Abkürzung bezeichne man $\sin\varphi$ mit z; dann ist

$$r^2 z^2 - m^2 z^4 = r^2 z_1^2 - m^2 z_1^4$$

also $$[r^2 - m^2 (z^2 + z_1^2)] (z + z_1)(z - z_1) = 0.$$

Es ist aber

$$z - z_1 = \sin\varphi - \sin\varphi_1 = 2\cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi_1}{2}$$

also

$$(z + z_1)[r^2 - m^2(z^2 + z_1^2)]\cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi_1}{2} = 0.$$

Wenn man nun durch die halbe Differenz der Bogen, $\frac{\varphi-\varphi_1}{2}$, die Gleichung dividirt, und dann $\varphi_1 = \varphi$ setzt, so bleibt darin noch der Factor $\cos\varphi$

$$\sin\varphi\,[r^2 - 2m^2\sin^2\varphi]\cos\varphi = 0.$$

Hierin könnte, 1) $\sin\varphi = 0$ sein; dann wäre aber der Inhalt des Dreiecks gleich Null. 2)

$$r^2 - 2m^2 \sin^2\varphi = 0$$

woraus $$\sin^2\varphi = \frac{r^2}{2m^2}$$

hervorgeht. Es läßt sich aber hieraus nur dann φ bestimmen, wenn nicht

$$2m^2 < r^2.$$

Diese beiden Fälle sind die, welche die erste Auflösung lieferte.

Nun aber ist noch 3)

$$\cos\varphi = 0, \quad \varphi = 90^\circ$$

möglich. Die Sehne kann aber nie auf der vom gegebenen Punkte durch den Mittelpunkt gezogenen Linie senkrecht stehen, wenn der Punkt außerhalb jenes mit der mittleren Proportionale zwischen $\frac{1}{2}r$ und r beschriebenen Kreises liegt. Also für diese Lage ist es nicht möglich, daß der Factor $\cos\varphi$ die Gleichung zu Null mache. Wenn dagegen der Punkt innerhalb dieses Kreises sich befindet, wenn also

$$m < \sqrt{\frac{r}{2}} \cdot r$$

so ist

$$2m^2 < r^2$$

also $r^2 - 2m^2 \sin^2\varphi$ eine positive Größe und nie Null. In diesem Falle kann also nur der dritte Factor, $\cos\varphi$, die Auflösung geben.

Anmerkung. Es lehrt diese Aufgabe, daß man achtsam darauf sein muß, durch die Division mit $x - x_1$ nicht eine Wurzel der Bestimmungsgleichung fortzuwerfen.

4. Dasselbe gilt von der entsprechenden stereometrischen Aufgabe:

Welcher von den Durchschnittskreisen einer Kugel, die durch eine außerhalb oder innerhalb derselben gegebene Linie gelegt werden können, ist Grundkreis des größten, mit dem Scheitel im Mittelpunkte ruhenden Kegels?

Auflösung. Bei derselben Bezeichnung, wie in der vorhergehenden Aufgabe, ist

$$K = \tfrac{1}{3}\pi m \sin\varphi\,(r^2 - m^2\sin^2\varphi)$$

woraus $$(r^2 - 3m^2\sin\varphi)\cdot\cos\varphi = 0.$$

5

Der erste Factor, der den Abstand des gesuchten Durchschnittskreises $= r\sqrt{\frac{1}{3}}$ giebt, kann nicht zu Null werden, wenn der Abstand der gegebenen Linie kleiner ist, als die mittlere Proportionale zwischen $\frac{1}{3}r$ und r. In diesem Falle ergiebt $\cos\varphi = 0$, daß der Durchschnittskreis senkrecht auf der durch die gegebene Linie und den Mittelpunkt gehenden Ebene stehen muß. Hier ändert sich die Größe des Maximums mit dem Abstande der gegebenen Linie; aber in jenem Falle erhält man stets denselben Kegel, welcher entsteht, indem um die kleinere Kathete ein rechtwinkeliges Dreieck rotirt, worin die Quadrate der Seiten sich verhalten wie 1 : 2 : 3.

5. In der Axe eines graden Kegels ist ein Punkt gegeben; durch denselben werden Kugeln beschrieben, deren Mittelpunkte in der Axe nach dem Scheitel hin und darüber hinaus liegen und welche den Mantel schneiden. Wo ist der Mittelpunkt derjenigen Kugel, bei welcher das innerhalb des Kegels liegende Stück der Oberfläche ein Minimum ist?

Auflösung. Bildet die Axe des Kegels mit einer Seitenlinie den Winkel α und ist m der Abstand des gegebenen Punktes vom Scheitel und φ der Winkel, welchen ein nach dem Durchschnitt mit dem Mantel gezogener Kugelradius x mit der Axe bildet, so ist die Calotte

$$C = 4\pi\left[x \sin\frac{\varphi}{2}\right]^2$$

und es findet sich aus

$$m = x\,\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin\alpha} + x$$

der Kegelradius

$$x = \frac{m \sin\alpha}{\sin(\varphi - \alpha) + \sin\alpha}$$

Daher

$$C = 4\pi\left[\frac{m \sin\alpha \sin\frac{\varphi}{2}}{\sin(\varphi - \alpha) + \sin\alpha}\right]^2$$

Es muß also

$$\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin (\varphi - \alpha) + \sin \alpha}$$

ein Minimum werden.

Nachdem man diesen Bruch gleich dem entsprechenden mit φ_1 gesetzt und die Nenner fortmultiplicirt hat, subtrahirt man von beiden Seiten

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} \sin (\varphi_1 - \alpha)$$

so erhält man für $\varphi_1 = \varphi$ eine Gleichung, in welcher der Factor $\sin \frac{\varphi}{2}$ nicht Null sein kann; vielmehr ist

$$\cos \frac{\varphi}{2} \cos \left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right) = \cos (\varphi - \alpha)$$

und wenn man das Product in eine Summe [nach $\cos (u + v) + \cos (u - v)$] auflöst, folgt

$$\cos \alpha = \cos (\varphi - \alpha)$$

also $\varphi - \alpha = \alpha$, mithin $\varphi = 2\alpha$.

Demnach ist der Halbirungspunkt des Abstandes m des gegebenen Punktes vom Scheitel der Mittelpunkt der gesuchten Kugel. Das Minimum gehört also der Kugel an, welche durch den Scheitel des Kegels geht.

Zusatz. Die kleinste Calotte ist gleich dem Inhalte eines Kreises, dessen Radius der Abstand des gegebenen Punktes von dem Mantel des Kegels ist.

§. 23.

1. Welches unter den einem Kreise eingeschriebenen gleichschenkeligen Dreiecken hat den größten Umfang? (Vergl. §. 18. Nr. II. gegen das Ende.)

Auflösung. Nennt man den Winkel an der Spitze 2φ, so ist jeder Schenkel $2r \cos \varphi$ und die halbe Grundlinie $r \sin 2\varphi$. Man gelangt zu der Bestimmungsgleichung

$$\cos 2\varphi = \sin \varphi$$

in welcher man $\sin \varphi$ durch $\cos (90^\circ - \varphi)$ ersetzen wird. Das Maximum ist das gleichseitige Dreieck.

2. Unter allen graden Kegeln, deren Seite dieselbe Länge s hat, den vom größten Inhalte zu construiren.

Auflösung. Man sieht sogleich, daß man bei der Entwickelung $\cos \varphi = x$ setzen wird; und findet $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Man construirt den Winkel φ sehr bequem, wenn man die Gleichung mit s multiplicirt,

$$s \cos \varphi = \sqrt{s \cdot \frac{s}{3}}.$$

Zusatz. Wie lautet die umgekehrte Aufgabe? (Vergl. §. 16. Nr. 5.)

3. Unter allen Dreiecken, die einen gegebenen Winkel enthalten und einem gegebenen Kreise umgeschrieben werden können, dasjenige zu finden, welches den größten oder kleinsten Flächeninhalt hat.

Auflösung. Durch eine Betrachtung, wie sie §. 21. Nr. 3. angestellt ist, überzeuge man sich zuerst davon, daß für die Dreiecke, welchen der Kreis eingeschrieben ist, die dem gegebenen Winkel 2α gegenüberliegende Seite bei dem Hinlaufen ihres Berührungspunktes an dem größeren Kreisbogen einmal ein Minimum von dem festen Winkel 2α abschneiden muß; und daß, wenn die bewegliche Seite zwischen den Scheitel des Winkels und den Kreis hinübergetreten ist, sie unter den nun abgegrenzten Dreiecken, für welche der Kreis ein äußerer Berührungskreis wird, ein Maximum liefert.

Faßt man ein Dreieck der ersten Art in's Auge, so sind, wenn die beiden veränderlichen Winkel mit 2φ und 2ψ bezeichnet werden, die Stücke der Seiten, in welche sie durch die Berührungspunkte getheilt werden, an den drei Ecken $r \cot g\, \alpha$, $r \cot g\, \varphi$ und $r \cot g\, \psi$. Der Inhalt des Dreiecks ist gleich dem Producte aus dem halben Umfange und dem Radius des eingeschriebenen Kreises,

$$D = r^2 (\cot g\ \alpha + \cot g\ \varphi + \cot g\ \psi).$$

Demnach muß $\cot g\ \varphi + \cot g\ \psi = \cot g\ \varphi + tg\ (\alpha + \varphi)$ ein Minimum (oder Maximum) werden. Ersetzt man in

$$tg\ (\alpha + \varphi) - tg\ (\alpha + \varphi_1) = \cot g\ \varphi_1 - \cot g\ \varphi$$

diese Functionen durch sin und cos, und bringt auf gemeinsame Nenner, so hebt sich sofort $\sin\ (\varphi - \varphi_1)$, und nach Gleichsetzung von φ_1 und φ erhält man

$$\cos\ (\alpha + \varphi) = \pm \sin\ \varphi.$$

Aus $\cos\ (\alpha + \varphi) = + \sin\ \varphi = \cos\ (90^0 - \varphi)$ ergiebt sich der erste Werth

$$2\ \varphi = 90^0 - \alpha \text{ und dazu auch } 2\ \psi = 90^0 - \alpha$$

dann aber aus

$$\cos\ (\alpha + \varphi) = - \sin\ \varphi = \cos\ (270^0 - \varphi)$$

der zweite Werth $\qquad 2\ \varphi = 270^0 - \alpha$

welcher auf die andere Dreiecksgruppe hindeutet, und ihr Maximum nur durch einen überstumpfen Winkel feststellen kann, weil Winkel $2\ \varphi$ beim Hinübergehen der bewegten Seite auf den kleineren Kreisbogen schon zu einem flachen Winkel geworden war. Der Theil dieses überstumpfen Winkels, welcher Dreieckswinkel ist $(90^0 - \alpha)$, giebt dann den anderen $2\ \psi = 90^0 - \alpha$. Das Minimum und das Maximum sind also gleichschenkelig und sind mittelst der Halbirungslinie des Winkels 2α zu construiren.

4. Unter denselben Bedingungen, wie in der vorhergehenden Aufgabe, soll das Dreieck mit dem größten oder kleinsten Umfange gefunden werden.

Auflösung. Daß und auf welcher Seite hier ein Maximum oder ein Minimum existirt, übersieht man sogleich. Die Rechnung würde ganz dieselbe sein.

5. Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel 2α und denselben Flächeninhalt k^2 haben, dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat.

Auflösung. Sind x, y, z die Seiten eines solchen

Dreiecks und 2α, 2φ und 2ψ die ihnen gegenüberliegenden Winkel, so hat man für den Umfang $2s$

$$2s = x + y + z$$

und dazu noch die Bedingungsgleichung

$$yz \sin 2\alpha = 2k^2.$$

Diese verwandeln sich, wenn man y und z durch x und die ihnen gegenüberliegenden Winkel ausdrückt, in

$$2s = \frac{x}{\sin 2\alpha} [\sin 2\alpha + \sin 2\varphi + \sin 2\psi]$$

und

$$\frac{x^2}{\sin^2 2\alpha} \cdot \sin 2\alpha \sin 2\varphi \sin 2\psi = 2k^2$$

also $$\frac{x}{\sin 2\alpha} = k \sqrt{\frac{2}{\sin 2\alpha \sin 2\varphi \sin 2\psi}}$$

Setzt man dies in den Ausdruck $2s$ ein, und benutzt, daß die Summe der Sinus der Dreieckswinkel

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

ist, so hat man

$$2s = 2k \sqrt{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{cotg} \psi}.$$

Demnach muß $\operatorname{cotg} \varphi \operatorname{cotg} \psi = \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{tang} (\alpha + \varphi)$ ein Minimum werden.

Subtrahirt man von beiden Seiten der Gleichung

$$\operatorname{cotg} \varphi \operatorname{tg} (\alpha + \varphi) = \operatorname{cotg} \varphi_1 \operatorname{tg} (\alpha + \varphi_1)$$

den Ausdruck $\operatorname{cotg} \varphi_1 \operatorname{tg} (\alpha + \varphi)$ (welcher sich von jenen nur durch einen Index unterscheidet), so zieht sich

$$(\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{cotg}\varphi_1) \operatorname{tg}(\alpha+\varphi) = \operatorname{cotg}\varphi_1 [\operatorname{tg}(\alpha+\varphi_1) - \operatorname{tg}(\alpha+\varphi)]$$

leicht zusammen, und giebt

$$\sin 2 (\alpha + \varphi) = \sin 2 \varphi.$$

Hieraus geht nun nicht hervor $2 (\alpha + \varphi) = 2 \varphi$ sondern

$$2 (\alpha + \varphi) = 180^\circ - 2 \varphi$$

und daher

$$2 \varphi = 90^\circ - \alpha = 2 \psi.$$

Daß man zur Construction des gleichschenkeligen Dreiecks von dem gegebenen Winkel 2α erst ein nichtgleichschenkeliges

abschneidet, welches gleich dem gegebenen Quadrate k^2 ist, und durch die mittlere Proportionale zwischen den 2α einschließenden Seiten den Schenkel findet, ist bekannt.

6. Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel 2α und denselben Umfang $2s$ haben, dasjenige zu finden, welches den größten Inhalt hat.

Auflösung. Hier gelangt man zu dem Ausdrucke

$$D = s^2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi$$

und durch eine ganz entsprechende Rechnung zu demselben Resultate.

Man construirt das Dreieck, indem man an die Endpunkte des gegebenen Umfanges $2s$ die Winkel α und $45^0 - \frac{\alpha}{2}$ und in dem Durchschnittspunkte der Schenkel derselben sie gleichfalls anträgt.

§. 24.

1. Auf einem regelmäßigen n=Ecke steht eine Pyramide, deren Spitze in dem im Mittelpunkte der Grundfläche errichteten Perpendikel liegt. Man soll dieselbe durch Ebenen parallel der Basis dergestalt durchschneiden, daß die auf dem Durchschnitt zu construirende Pyramide, deren Spitze im Mittelpunkte der Grundfläche der gegebenen sich befindet, möglichst große oder möglichst kleine Seitendreiecke habe.

Auflösung. Ist a die Seite der Grundfläche und r der Radius des ihr eingeschriebenen Kreises, h die Höhe der Pyramide und x der Abstand des Schnittes von ihrer Spitze, so ist der Inhalt eines Seitendreiecks

$$D = \tfrac{1}{2}\frac{a}{h}x\sqrt{(h-x)^2 + \frac{r^2}{h^2}x^2}$$

woraus $x = \frac{h^2}{4(h^2+r^2)}[3h \pm \sqrt{h^2 - 8r^2}]$.

Ist z. B. $r = \frac{1}{3}h$, so ist $x_1 = \frac{3}{4}h$ und $x_2 = \frac{3}{5}h$; und

man erkennt durch Berechnung der Seitendreiecke für diese x und andere, etwas kleinere und größere Abstände, daß die Seitendreiecke bei $x = \frac{3}{5}h$ ein Maximum sind; daß sie bei wachsendem Abstande des Schnittes von der Spitze der Pyramide wieder kleiner werden; bei $x = \frac{3}{4}h$ ein Minimum erreichen, und daß sie dann (bei Erweiterung der Pyramide über die Grundfläche hinaus) ohne Aufhören zunehmen.

Anmerkung. Für den Inhalt der Pyramide giebt es nur ein Maximum, nämlich für den Schnitt, welcher doppelt so weit vom Scheitel als von der Grundfläche entfernt ist. Diese größte Pyramide ist diejenige, deren Schwerpunkt in den der gegebenen fällt. Das Gesagte gilt natürlich auch für Kegel. (S. die folg. Aufg.)

2. Zwischen dem Scheitel eines graden Kegels und einem in der Entfernung m von ihm in der Axe liegenden Punkte soll ein zur Axe senkrechter Durchschnitt gelegt werden, welcher Grundkreis eines mit dem Scheitel in dem gegebenen Punkte ruhenden Kegels wird. Wo ist der Durchschnitt in dem gegebenen Kegel, dessen Axe mit der Seitenlinie den Winkel α bildet, zu legen, damit der Mantel dieses so eingezeichneten Kegels ein Maximum oder Minimum werde? (Vergl. §. 38. Nr. 1.)

1. Auflösung. Bedeutet x den Abstand des Schnittes vom Scheitel des gegebenen Kegels, so ist ein solcher Mantel

$$M = \pi \operatorname{tg} \alpha \cdot x \sqrt{(m - x)^2 + x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

und man erhält zwei Werthe

$$x = \frac{1}{4} m \cos \alpha \left[3 \cos \alpha \pm \sqrt{1 - (3 \sin \alpha)^2}\right]$$

die nur bei solchen gegebenen Kegeln möglich sind, bei denen nicht

$$3 \sin \alpha > 1$$

ist. Nimmt man die Formel in dieser Gestalt

$$x = \left[\frac{3}{4} m \cdot \cos \alpha \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} m)^2 - (\tfrac{3}{4} m \cdot \sin \alpha)^2}\right] \cos \alpha$$

und führt nach ihrer Anleitung in dem gegeben Winkel 2α die Construction aus, so zeigt sich, daß man durch ein höchst einfaches Verfahren zur Auflösung gelangt: man beschreibt um den Punkt der Axe, welcher $\frac{3}{4}$m vom Scheitel entfernt ist, mit $\frac{1}{4}$m einen Kreis; da, wo er die Schenkel des Winkels 2α schneidet, sind die beiden gesuchten Schnitte zu führen; erreicht der Kreis die Schenkel nicht, so ist die Aufgabe nicht möglich.

Eine weit kürzere Formel ergiebt sich, wenn man mit trigonometrischen Functionen die Rechnung macht.

2. Auflösung. Der Winkel, welchen die Seite des eingezeichneten Kegels mit der Axe bildet, heiße φ und der Radius seines Grundkreises y. Durch Gleichsetzung der Ausdrücke $y = x \operatorname{tg} \alpha$ uud $y = (m - x) \operatorname{tg} \varphi$ erhält man

$$x = \frac{m \cos \alpha \sin \varphi}{\sin (\alpha + \varphi)}$$

also

$$y = \frac{m \sin \alpha \sin \varphi}{\sin (\alpha + \varphi)}.$$

Ferner ist die Seite des eingezeichneten Kegels $\frac{m \sin \alpha}{\sin (\alpha + \varphi)}$, so daß der Mantel

$$M = \pi m^2 . \sin^2 \alpha \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin^2 (\alpha + \varphi)}.$$

Demnach setzt man

$$\frac{\sin \varphi}{\sin^2 (\alpha + \varphi)} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin^2 (\alpha + \varphi_1)}$$

oder $\sin^2 (\alpha + \varphi_1) \sin \varphi = \sin^2 (\alpha + \varphi) \sin \varphi_1$.

Subtrahirt man von beiden Seiten denselben Ausdruck mit der Marke an dem Buchstaben φ, also $\sin^2 (\alpha + \varphi_1) \sin \varphi_1$, so erhält man

$$\sin^2(\alpha+\varphi_1)[\sin\varphi-\sin\varphi_1]=\sin\varphi_1[\sin^2(a+\varphi)-\sin^2(\alpha+\varphi_1)]$$

nun zerlegt man die Differenz der Quadrate in das Product aus Summe und Unterschied

$$\sin^2 (\alpha + \varphi_1) [\sin \varphi - \sin \varphi_1]$$
$$= \sin\varphi_1 [\sin(\alpha+\varphi)+\sin(\alpha+\varphi_1)][\sin(\alpha+\varphi)-\sin(\alpha+\varphi_1)]$$

Hieraus findet man (die Klammer mit der Summe der Sinus ziehe man nicht in ein Product zusammen)

$$\sin(\alpha+\varphi)\cdot[\sin(\alpha+\varphi)\cos\varphi-2\cos(\alpha+\varphi)\sin\varphi]=0$$

Es würde aber der erste Wurzelwerth, $\alpha+\varphi=180^\circ$, den Mantel unendlich groß geben, und darum muß der andere Factor gleich Null sein, den man auch schreiben kann

$$\sin(\alpha+\varphi)\cos\varphi-\cos(\alpha+\varphi)\sin\varphi-\cos(\alpha+\varphi)\sin\varphi=0$$

oder $$\sin\alpha-\cos(\alpha+\varphi)\sin\varphi=0.$$

Verschafft man sich endlich statt des Productes eine Differenz mittelst der Formel

$$\sin(u+v)-\sin(u-v)=2\cos u\sin v$$

so findet man

$$\sin(\alpha+2\varphi)=3\sin\alpha$$

woraus sich φ bequem berechnen läßt.

Zusatz 1. Diese Gleichung lehrt, übereinstimmend mit dem Ausdrucke für x unter Auflösung 1., daß, wenn die Aufgabe möglich sein soll, α höchstens den Werth annehmen darf $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, was bei $\alpha=19^\circ\ 28'\ 16''$ der Fall ist, wo dann aus $\alpha+2\varphi=90^\circ$ hervorgeht $\varphi=35^\circ\ 15'\ 52''$.

Zusatz 2. Ist bei dem gegebenen Kegel α kleiner als $19^\circ\ 28'\ 16''$, so hat die Gleichung

$$\sin(\alpha+2\varphi)=3\sin\alpha$$

für φ zwei mögliche Werthe. Ist z. B. $\alpha=10^\circ$, so ist

entweder $\alpha+2\varphi=31^\circ\ 23'\ 44''$

oder $180^\circ-(\alpha+2\varphi)=31^\circ\ 23'\ 44''$

also $\varphi_1=10^\circ\ 41'\ 52''$ und $\varphi_2=69^\circ\ 18'\ 8''$.

Der Mantel der eingeschriebenen Kegel fängt also bei $\varphi=0$ mit Null an, wächst und erreicht für $\varphi=10^\circ\ 41'\ 52''$ ein Maximum (140769□', wenn m = 1000' gegeben ist), nimmt dann wieder ab, wird bei $\varphi=69^\circ\ 18'\ 8''$ ein Minimum (91779□') und wächst von hier bis in's Unendliche.

Zusatz 3. Auch eine geometrische Construction läßt sich aus der trigonometrischen Gleichung ablesen, wenn man schreibt

$$\sin(\alpha+2\varphi)=\frac{3\cdot m\sin\alpha}{m}$$

wo dann 1) der erhaltene spitze Winkel und 2) auch sein Nebenwinkel $\alpha + 2\varphi$ sein kann.

3. Unter allen Kreisausschnitten von gleichem Umfange $2s$ den Radius und die Zahl der Bogengrade desjenigen zu bestimmen, welcher den größten Flächeninhalt hat.

Auflösung. Bezeichnet man den Radius mit x, den Bogen mit $2y$, so findet sich aus

$$S = xy \text{ und } s = x + y$$

sehr leicht
$$x = \frac{s}{2} = y.$$

Der Bogen ist also gleich dem Durchmesser seines Kreises; also $= \frac{360^\circ}{\pi} = 114^\circ\ 35'\ 29'', 69 \ldots .$

4. Unter allen Kreisausschnitten von gleichem Flächeninhalt a^2 denjenigen zu finden, welcher den kleinsten Umfang hat.

Auflösung. Der Radius des gesuchten Sectors ist gleich der Seite a des Quadrates, welches den gegebenen Flächeninhalt angiebt; und die Bogenzahl wie die in der vorhergehenden Aufgabe, da seine krummlinige Begrenzung gleich der gradlinigen ist.

5. Unter allen Kreisabschnitten von gleichem Umfange $2s$ denjenigen zu finden, welcher den größten Flächeninhalt hat.

Auflösung. Man denke sich um den Mittelpunkt des Kreises vom Radius x, der ein solches Segment enthält, den Kreis mit dem Radius 1 beschrieben. Der Bogen desselben, welcher von dem zum betrachteten Segmente gehörigen Centriwinkel abgeschnitten wird, habe die Länge 2φ. Dann ist der Inhalt des vorliegenden Segmentes

$$S = \tfrac{1}{2}x^2 \cdot 2\varphi - \tfrac{1}{2}x^2 \sin 2\varphi = \tfrac{1}{2}x^2 (2\varphi - \sin 2\varphi).$$

Der gegebene Umfang giebt

$$x = \frac{s}{\varphi + \sin\varphi}$$

mithin $$S = \frac{1}{2} s^2 \cdot \frac{2\varphi - \sin 2\varphi}{(\varphi + \sin \varphi)^2}$$

Demnach hat man

$$(2\varphi - \sin 2\varphi)(\varphi_1 + \sin \varphi_1)^2 = (2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1)(\varphi + \sin \varphi)^2$$

von beiden Seiten subtrahire man denselben Ausdruck mit den markirten Buchstaben, so ist, wenn man ordnet und die Differenz der Quadrate in ein Product auflöst,

$$[2(\varphi - \varphi_1) - (\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1)][\varphi_1 + \sin \varphi_1]^2 =$$
$$(2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1)[\varphi + \varphi_1 + \sin\varphi + \sin\varphi_1][\varphi - \varphi_1 + \sin\varphi - \sin\varphi_1]$$

Dies ergiebt nach der Gleichsetzung von $\varphi_1 = \varphi$

$$(1 - \cos 2\varphi)[\varphi + \sin\varphi] = (2\varphi - \sin 2\varphi)[\varphi + \sin\varphi][1 + \cos\varphi].$$

Es ist aber der erste Factor

$$1 - \cos 2\varphi = 1 - 2\cos^2\varphi + 1 = 2(1 - \cos^2\varphi) = 2(1 + \cos\varphi)(1 - \cos\varphi)$$

so daß man, wenn die Glieder auf eine Seite des Gleichheitszeichens gebracht sind, $(\varphi + \sin \varphi)$ und auch $[1 + \cos \varphi]$ als gemeinsame Factoren absondern kann

$$\{2(1 - \cos\varphi)(\varphi + \sin\varphi) - (2\varphi - \sin 2\varphi)\} \cdot (\varphi + \sin\varphi)[1 + \cos\varphi] = 0$$

oder

$$\{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi\}(\varphi + \sin\varphi)[1 + \cos\varphi] = 0$$

Der erste Factor, gleich Null gesetzt, giebt

$$\text{tang}\ \varphi = \varphi.$$

Die erste Wurzel dieser Gleichung ist $\varphi = 0$, die zweite liegt schon im dritten Quadranten, die dritte im fünften u. s. f. (Vergl. §. 32.) Daher kann keine von ihnen der in unserer Aufgabe gesuchte Werth von φ sein.

Der zweite Factor

$$\varphi + \sin \varphi = 0$$

wird nur durch $\varphi = 0$ befriedigt.

Mithin kann nur der dritte Factor

$$1 + \cos \varphi = 0$$

das gesuchte Maximum liefern, nämlich durch den Werth

$$\varphi = \pi.$$

Es ist also ein ganzer Kreis mit dem Radius

$$x = \frac{s}{\pi} = 0{,}3183099 \ldots s.$$

6. Unter allen Kreisabschnitten von gleichem Flächeninhalt a^2 denjenigen zu finden, welcher den kleinsten Umfang hat.

Die Auflösung führt auf dieselbe Gleichung wie in der vorhergehenden Aufgabe. Es ist also wieder ein ganzer Kreis und der Radius

$$x = \frac{a}{\sqrt{\pi}} = 0{,}5641896 \ldots . \; a.$$

IV. Abschnitt.

Kegelschnitte.

§. 25.

1. Man soll zwischen einem in der Axe einer Parabel gegebenen Punkte und ihrem Scheitel eine zur Axe senkrechte Sehne ziehen, welche Grundlinie eines mit der Spitze in dem gegebenen Punkte ruhenden Dreiecks wird. In welchem Punkte der Axe ist diese Sehne zu errichten, damit das Dreieck ein Maximum werde?

Auflösung. Man findet leicht, daß der Abstand der Sehne vom Scheitel ein Drittel der Entfernung des gegebenen Punktes vom Scheitel ist.

Zusatz. Soll die Sehne eine gegebene schiefe Richtung haben (den spitzen Winkel α mit der Axe bilden), so ziehe man den Durchmesser der Parabel, welcher eine so gerichtete Sehne AB halbirt, und nehme ihn zur Abscissenaxe schiefwinkeliger Coordinaten. (Das Stück des Durchmessers von seinem Scheitel O bis zur Sehne AB heiße t, jede Hälfte der Sehne u) dann ist die Gleichung der Parabel

$$u^2 = \frac{2p}{\sin^2 \alpha}\, t.$$

Nun ziehe man durch den gegebenen Punkt P eine Linie in

der gegebenen Richtung nach jenem Durchmesser und betrachte den Schneidepunkt Q als Scheitel der Dreiecke, da sie den zu construirenden gleich sind. Nennt man OQ m, so ist der Inhalt eines solchen Dreiecks

$$D = (m - t)\, u \sin\alpha = (m - t) \sqrt{2pt}$$

ein Ausdruck von derselben Form wie in dem ersten Falle, wo die Sehne senkrecht zur Axe errichtet war. Man braucht also nur vom Scheitel O aus das erste Drittel von OQ abzuschneiden, um die Grundlinie des verlangten Dreiecks zu erhalten.

2. Innerhalb eines Rotationsparaboloides ist in der Axe mit der Entfernung m vom Scheitel ein Punkt gegeben. Zwischen diesem und dem Scheitel soll senkrecht zur Axe durch das Paraboloid ein Schnitt gelegt werden, als Grundkreis eines Kegels, dessen Spitze der gegebene Punkt ist. Wo muß der Schnitt geführt werden, damit der Kegel möglichst groß sei?

Die leichte Auflösung zeigt, daß er in der Mitte zwischen dem gegebenen Punkte und dem Scheitel gelegt werden müsse.

Anmerkung. Die Auflösung wird nicht schwerer, wenn man ein elliptisches Paraboloid giebt.

Sind die Gleichungen der beiden Haupt-Axenschnitte $y^2 = 2px$ und $y_1^2 = 2p_1x$, so ist

$$K = \tfrac{2}{3}\pi \sqrt{pp_1} \cdot x\,(m - x)$$

also $x = \frac{1}{2}m$ für das Maximum.

3. Bei welchem von diesen graden Kegeln ist der Mantel ein Maximum oder Minimum?

Auflösung. Ohne Schwierigkeit findet man

$$x = \tfrac{1}{3}\left[2(m - p) \pm \sqrt{m^2 - 8mp + 4p^2}\right]$$

was sich für das Beispiel $m = 8p$ vereinfacht in

$$x_1 = 5\tfrac{1}{3}p \text{ und } x_2 = 4p.$$

Der Kegelmantel fängt also beim Scheitel des Paraboloides von Null an, und wächst bis zu einem Maximum, was bei dem Durchschnittskreise mit dem Abstande 4p vom Scheitelpunkte eintritt. Dann nimmt der Mantel wieder ab, wird ein

Minimum für den Abstand $5\frac{1}{3}$ p, und wächst von da an, wenn man die Schnitte auch jenseit des gegebenen Punktes führt, unbegrenzt. Durch einige Berechnungen überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit.

Anmerkung. Da der Ausdruck unter der Wurzel positiv sein muß, so ist die Lage des gegebenen Punktes an die Bedingung geknüpft, daß

$$m > 2\,(2 + \sqrt{3})\,p \text{ d. i. } m > 7{,}464\ldots.\,p$$

sein muß.

4. In ein Parabelsegment, welches durch eine auf der Axe senkrechte Sehne abgeschnitten wird, soll das Rechteck mit größtem Umfange eingeschrieben werden.

Auflösung. Es ergiebt sich schnell $y = 2p$, also auch $x = 2p$.

Anmerkung. Die Construction lehrt, 1) daß nur dann ein Maximum existirt, wenn der Abstand der Sehne, welche das Segment von der Parabel abschneidet, größer als 2p ist; und 2) daß für alle Segmente das Maximum stets dieselben Punkte der Parabel zu Eckpunkten hat.

5. Welche von den Kugeloberflächen, die um einen Brennpunkt eines durch Umdrehung einer Ellipse um die große Axe entstandenen Ellipsoides beschrieben werden können, hat innerhalb des Ellipsoides die größte Calotte?

Auflösung. Um einen Brennpunkt der gegebenen Ellipse beschreibe man einen der zu betrachtenden Kreise und ziehe nach einem seiner Durchschnittspunkte mit der Ellipse den Radius r; dieser bilde mit der Excentricität e den Winkel 2φ. Dann wird die Calotte C

$$C = 4\pi r^2 \sin^2 \varphi.$$

Es ist aber aus der Gleichung der Ellipse für Polarcoordinaten

$$r = \frac{p}{1 - \frac{e}{a}\cos 2\varphi}$$

mithin $C = 4\pi p^2 \left[\frac{\sin\varphi}{1 - \frac{e}{a}\cos 2\varphi}\right]^2$.

Ersetzt man $\cos 2\varphi$ durch $\sin\varphi$, und bezeichnet $\sin\varphi$ mit z, so ist

$$\frac{z}{1 - \frac{e}{a} + 2\frac{e}{a}z^2}$$

zu einem Maximum zu machen. Für solches ergiebt sich

$$z = \sqrt{\frac{a - e}{2e}}$$

Um diesen Ausdruck zu construiren, multiplicire man beide Seiten mit einer beliebigen Länge, am bequemsten mit der kleinen Halbaxe b,

$$b \sin\varphi = \sqrt{\frac{(a - e)\,b^2}{2e}}$$

dann braucht man in der gegebenen Ellipse nur zwei Linien zu ziehen, um

$$c = \frac{(a - e)\,b}{e}$$

zu haben. Beschreibt man nun wegen

$$b \sin\varphi = \sqrt{\frac{c}{2} \cdot b}$$

über b nach der Seite des Kreismittelpunktes einen Halbkreis, trägt auf b von seinem Scheitel aus $\frac{c}{2}$ ab und legt durch diesen Theilpunkt eine Ordinate des Halbkreises, so schließt die nach ihrem Endpunkte vom Mittelpunkte der Ellipse gezogene Linie mit b den gesuchten Winkel φ ein. Verdoppelt man ihn auf derselben Seite der kleinen Axe und fällt auf den neuen Schenkel von 2φ senkrecht einen Radius vector der Ellipse, so ist derselbe der Radius des Kreises, welcher bei Rotation der Figur die größte Calotte liefert.

6. Auf welcher von diesen Calotten steht der größte Sector?

Auflösung. $S = \frac{4}{3}\pi p^3 \cdot \frac{\sin^2\varphi}{\left(1 - \frac{e}{a} + 2\frac{e}{a}\sin^2\varphi\right)^3}$

Man setze zur Abkürzung $\sin^2\varphi = t$ und

$$1 - \frac{e}{a} + 2\,\frac{e}{a}\,t = u$$

so hat man

$$\frac{t}{u^3} = \frac{t_1}{u_1^3}.$$

Zur Auflösung subtrahire man $t_1\,u_1^3$ von beiden Seiten der Gleichung

$$tu_1^3 = t_1 u^3$$

so findet sich durch Zerlegung

$$(t - t_1)\,u_1^3 = t_1\,(u^2 + uu_1 + u_1^2)\,(u - u_1)$$

folglich erhält man, da

$$u - u_1 = 2\frac{e}{a}\,(t - t_1)$$

ist, nach Division mit $t - t_1$, durch die Gleichsetzung

$$u^3 = 6\,\frac{e}{a}\,tu^2.$$

Es würde aber die Wurzel $u = 0$ $\sin\varphi$ imaginär machen; darum gilt nur

$$u = 6\,\frac{e}{a}\,t$$

woraus sich

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a - e}{e}}$$

ergiebt.

Die Construction unterscheidet sich von der in Nr. 5. nur dadurch, daß hier

$$b\sin\varphi = \sqrt{\frac{c}{4}\cdot b}$$

ist.

§. 26.

1. Welcher von den einem Rotationsellipsoide eingeschriebenen graden Cylindern hat die größte Oberfläche? (Vergl. §. 13. Nr. 9.)

Auflösung. Bei Umdrehung um die kleine Axe ist, wegen $y = x \operatorname{tg} \varphi$

$$F = 2\pi x^2 (1 + 2\operatorname{tg}\varphi)$$

oder, wenn man x^2 mittelst der Ellipsengleichung bestimmt,

$$F = 2\pi a^2 b^2 \cdot \frac{1 + 2\operatorname{tg}\varphi}{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2}.$$

Zur Abkürzung setze man $\operatorname{tg}\varphi = z$; man findet

$$z = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + \frac{b^2}{a^2}}.$$

Die Construction des Winkels φ ist leicht ausgeführt, wenn man diese Gleichung schreibt

$$a \operatorname{tg}\varphi = \tfrac{1}{2}\left[- a + \sqrt{a^2 + (2b)^2}\right]$$

und somit ist der Cylinder gefunden.

2. Das größte unter den einer Ellipse eingeschriebenen gleichschenkeligen Dreiecken, deren Grundlinien einer Axe parallel sind, zu bestimmen.

Auflösung. Man rechne diejenige der beiden Coordinaten des zu bestimmenden Eckpunktes aus, welche der halben Grundlinie gleich ist. Liegt z. B. die Spitze des Dreiecks in dem auf der negativen Seite der Abscissenaxe befindlichen Scheitel der Ellipse, so ist y die halbe Grundlinie; dieselbe findet man

$$y = \frac{b}{2}\sqrt{3}$$

folglich $x = \frac{a}{2}$.

Will man aber die Coordinate ausrechnen, welche mit einer Halbaxe die Höhe des Dreiecks bildet, also in dem besprochenen Falle x, so löse man die Klammer $(a + x)$ auf

(schaffe also nicht die Wurzel fort), sonst erhält man eine kubische Gleichung (die übrigens durch die Cardanische Formel sehr leicht aufzulösen ist).

Zusatz 1. Die Größe des Maximums ist

$$M = \tfrac{3}{4}ab\sqrt{3}$$

folglich sind für beide Systeme von Dreiecken, deren Grundlinien entweder der großen oder der kleinen Axe parallel laufen, die Maxima einander gleich.

Zusatz 2. Welche Form muß eine Ellipse haben, damit das Maximum der so eingeschriebenen gleichschenkeligen Dreiecke gleichseitig sei?

3. Welches ist der größte unter den einem Rotationsellipsoide eingeschriebenen graden Kegeln, deren Axen in der Rotationsaxe liegen?

Auflösung. Es ist gleichgültig, welche Coordinate man zuerst berechnet. Es findet sich $y = \frac{b}{3}\sqrt{8}$ und $x = \frac{a}{3}$.

Zusatz 1. Das Maximum der elliptischen graden Kegel zu bestimmen, die einem gegebenen dreiaxigen Ellipsoide so eingeschrieben werden können, daß ihre Axen in einer Axe des Ellipsoides liegen.

Auflösung. Befindet sich die Spitze in dem auf der negativen Seite der a-Axe befindlichen Scheitel des Ellipsoides, so berechnet man x. Es giebt $x = \frac{1}{3}a$ die Lage des zu führenden Schnittes an. Die Halbaxen dieser Grundfläche sind

$$y = \tfrac{1}{3}b\sqrt{8} \text{ und } z = \tfrac{1}{3}c\sqrt{8}$$

folglich ist das Maximum

$$M = \tfrac{32}{81}\pi abc.$$

Hieraus ist wiederum ersichtlich, daß die Maxima der drei Kegelsysteme mit den Spitzen in den Scheiteln des Ellipsoides gleich groß sind; sie verhalten sich zum Ellipsoide wie $2^3 : 3^3$.

Zusatz 2. Diese drei Aufgaben (Nr. 2., 3. und Zusatz 1.) zeigen, daß sowohl für die Ebene als auch für den

Raum die größte eingeschriebene Figur diejenige ist, deren Schwerpunkt in den der Hauptfigur fällt.

Zusatz 3. Welche Gestalt muß ein Rotationsellipsoid haben, damit, wenn statt der Kegel grade Tetraeder eingeschrieben werden, das Maximum regelmäßig ausfallen soll?

4. Welchen Punkt eines elliptischen Quadranten muß man mit seinen Endpunkten verbinden, damit auf der zugehörigen Sehne das größte Dreieck entstehe?

Auflösung. Der Inhalt des Dreiecks bestimmt sich leicht, da es die Differenz zwischen einem Vierecke und einem (nicht veränderlichen) Dreiecke ist. Die Coordinaten des Punktes ergeben sich $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $y = b\sqrt{\frac{1}{2}}$. Da nun $x : y = a : b$, so ist der gesuchte Punkt der Endpunkt des mit der andern Scheitelsehne parallelen Durchmessers.

Zusatz. Einem beliebigen Segmente einer Ellipse das größte Dreieck einzuschreiben.

Auflösung. Sind α, β und α_1, β_1 die Coordinaten der Endpunkte der gegebenen Sehne (die man am bequemsten so wählt, daß dieselben alle positiv sind), so erhält man

$$x = \frac{a(\beta_1 - \beta)}{\sqrt{a^2(\beta_1 - \beta)^2 + b^2(\alpha - \alpha_1)^2}}.$$

Bildet der nach dem gesuchten Punkte gehende Durchmesser und die gegebene Sehne mit der positiven Richtung der Abscissenaxe oberhalb die Winkel φ und ψ, so zeigt sich, daß

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\alpha - \alpha_1}{\beta_1 - \beta} = -\frac{b^2}{a^2}\operatorname{cotg}\psi$$

also $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = -\frac{b^2}{a^2}$

ist, woraus man ersieht, daß der Scheitel des Maximums Endpunkt des der Sehne conjugirten Durchmessers ist. Hieraus geht hervor, daß die Maxima aller Dreiecke, die auf parallelen Sehnen stehen, die Spitzen in einem und demselben Punkte haben.

Auch folgende Betrachtung löst die Aufgabe: Rückt man in dem Segmente eine der Sehne parallele Secante weiter und weiter von derselben fort, so werden die beiden Dreiecke, die ihre Scheitel in den Schnittpunkten haben, immer größer. Sie sind am größten, wenn die Secante in die Tangente übergegangen ist. Ihr Berührungspunkt ist jener Punkt.

Anmerkung. Von der Hyperbel gilt das nämliche.

5. Einem Parabelsegmente das größte Dreieck einzuschreiben.

Auflösung. Hier muß $(\alpha - \alpha_1)\, y - (\beta - \beta_1)\, \frac{y^2}{2p}$ ein Maximum werden, was für

$$y = p\, \frac{\alpha - \alpha_1}{\beta - \beta_1}$$

der Fall ist. Durch Subtraction der Ausdrücke für β^2 und β_1^2 erhält man aber $y = \frac{\beta + \beta_1}{2}$, d. i. die Ordinate des Halbirungspunktes der Sehne. Mithin liegen auch hier die Spitzen der Maxima aller auf parallelen Sehnen stehenden Dreiecke in dem Scheitel des sie halbirenden Durchmessers.

6. Es ist ein Bogen einer Parabel gegeben vom Scheitel bis zu einem Punkte, dessen Abscisse a ist. Wie groß ist die Abscisse des Punktes in diesem Bogen, von welchem man nach den Endpunkten desselben Sehnen ziehen muß, damit dieselben mit den Endpunktscoordinaten (a und b) ein Viereck einschließen, welches bei der Umdrehung um die Axe der Parabel einen möglichst großen Rotationskörper erzeugt?

Auflösung. $K = \frac{\pi}{3} y^2 x + \frac{\pi}{3} (a - x)(y^2 + by + b^2)$.

Setzt man nach Auflösung der Klammern nur für y^2 und b^2 ihre Werthe aus der Parabelgleichung, so ist

$$K = \frac{\pi}{3} b\,(ay - xy) = \frac{\pi}{3} b \left(ay - \frac{y^3}{2p}\right)$$

woraus $y = \sqrt{\frac{2pa}{3}} = b \sqrt{\frac{1}{3}}$ und $x = \frac{a}{3}$.

Anmerkung. Wenn ein beliebiger Parabelbogen, der durch die Coordinaten a, b und a_1, b_1 seiner Endpunkte gegeben ist, sich um die Axe dreht, so wird der größte aus zwei abgestumpften Kegeln bestehende Rotationskörper auf diese Weise durch denjenigen Punkt desselben erhalten, welcher die Coordinaten hat

$$x = \frac{1}{3}(a + \sqrt{aa_1} + a_1) \text{ und } y = \sqrt{\frac{1}{3}(b^2 + bb_1 + b_1^2)}.$$

§. 27.

1. Im Umfange einer Ellipse die vier Punkte zu bestimmen, bei welchen die Tangente mit dem nach ihrem Berührungspunkte gezogenen Durchmesser den kleinsten Winkel einschließt.

Auflösung. Der Durchmesser und die Tangente mögen mit der positiven Richtung der Abscissenaxe oberhalb die Winkel φ und ψ bilden; dann hat man

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x},$$

und mit Hülfe der Coordinaten der Durchschnittspunkte der Tangente mit den Axen

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

Betrachtet man nun den Winkel (180° — w) zwischen Tangente und Durchmesser, welcher gleich $\psi - \varphi$ ist, so erhält man, wenn man $\operatorname{tg}(\psi - \varphi)$ auflöst und für $\operatorname{tg} \varphi$ und $\operatorname{tg} \psi$ die obigen Ausdrücke einsetzt,

$$\operatorname{tg} w = \frac{a^2 b^2}{e^2 xy}$$

Folglich ist w ein Minimum, wenn xy ein Maximum ist, was für

$$x = a\sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ und } y = b\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

eintritt. Mithin sind die gesuchten Punkte die Endpunkte der Durchmesser, welche die die Scheitel verbindenden Sehnen hal-

biren; und der Winkel ist gleich demjenigen, welchen die Scheitelsehnen mit einander bilden.

2. Um eine Ellipse den kleinsten Rhombus zu construiren.

Auflösung. Die Diagonalen der Rhomben müssen in die Axen der Ellipse fallen. Die Berührungspunkte der Seiten des Minimums sind die vier Punkte der Aufgabe Nr. 1., also leicht zu erhalten. Die halben Diagonalen sind $\alpha = a\sqrt{2}$ und $\beta = b\sqrt{2}$, also

$$\alpha : \beta = a : b$$

folglich ist der kleinste Rhombus ähnlich dem durch die vier Scheitelpunkte bestimmten.

3. Welcher von diesen Rhomben beschreibt bei der Umdrehung um eine Axe den kleinsten Doppelkegel?

Auflösung. Erfolgt die Umdrehung um die kleine Axe, so findet man $y = b\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, mithin die halben Diagonalen

$$\alpha = a\sqrt{\tfrac{3}{2}} \text{ und } \beta = b\sqrt{3}.$$

Von der Seite des rotirenden Rhombus schneidet hier der Berührungspunkt vom Grundkreise aus ein Drittel ab, während er sie in der vorigen Aufgabe halbirte. Trägt man b vom Mittelpunkte aus auf der großen Axe ab und beschreibt um den Endpunkt mit 2b einen Kreis, so schneidet er die Rotationsaxe in den Scheitelpunkten des kleinsten Doppelkegels.

Zusatz. Ebenso leicht ist die Aufgabe für ein dreiaxiges Ellipsoid.

Auflösung. Fällt die Axe des Kegels in die c-Axe, so ist die Halbaxe des Kegels $\gamma = c\sqrt{3}$ und die Halbaxen der Grundfläche $\alpha = a\sqrt{\frac{3}{2}}$ und $\beta = b\sqrt{\frac{3}{2}}$.

$M = \pi abc\sqrt{3}$ zeigt, daß die Minima auf den drei Axen gleich sind.

4. Welches ist der kleinste unter den elliptischen graden

Kegeln, welche man um ein Octaeder, dessen drei Axen in ihren Halbirungspunkten senkrecht auf einander stehen, so construiren kann, daß vier Ecken im Mantel liegen und eine der beiden andern Mittelpunkt der Grundfläche ist?

Auflösung. $K = \frac{1}{3}\pi ab \cdot \frac{z^3}{(z-c)^2}$, wenn die Halbaxen des Octaeders a, b, c sind, und z die Höhe des Kegels bedeutet. Dieselbe ergiebt sich $z = 3c$ und die Axen der Grundfläche 3a und 3b. Der Inhalt ist $\frac{9}{4}\pi abc$; folglich sind die Minima der drei Kegelgruppen, deren Grundflächen je einer Diagonalebene des Octaeders parallel sind, einander gleich.

5. Welches ist das kleinste unter den gleichschenkeligen Dreiecken, die man so um eine Ellipse beschreiben kann, daß die Grundlinie dieselbe in einem Scheitel berührt? (§. 35. Nr. 3.)

Auflösung. Um die Figur zu entwerfen, verlängere man die kleine Axe nach oben, nehme in der Verlängerung einen Punkt A an und ziehe von ihm aus zwei Tangenten an die Ellipse; lege durch das untere Ende S der kleinen Axe eine Tangente, welche die beiden ersten rechts in B und links in C schneiden möge. Der Berührungspunkt der Tangente AB heiße D, seine Ordinate DE; die große Axe schneide verlängert AB in G. Die halbe Grundlinie, SB, werde mit u, die Höhe AS mit v bezeichnet; dann ist der Inhalt des Dreiecks

$$D = uv.$$

Weil G der Schnittpunkt der Tangente AB in der Abscissenaxe ist, so hat man (Mittelpunkt der Ellipse heißt O) $OG = \frac{a^2}{x}$; mithin folgt aus $\Delta ABS \sim \Delta DGE$

$u : v = \left(\frac{a^2}{x} - x\right) : y$, also $v = \frac{b^2 x}{a^2 y} u$. Es giebt ferner die Gleichung der Tangente für den Punkt B $\frac{ux}{a^2} - \frac{by}{b^2} = 1$

$$u = \frac{a^2}{bx}(b + y).$$ Daher

$$D = \frac{a^2}{xy}(b+y)^2 = ab \cdot \frac{b+y}{y}\sqrt{\frac{b+y}{b-y}} = ab\left(\frac{b}{y}+1\right)\sqrt{\frac{\frac{b}{y}+1}{\frac{b}{y}-1}}$$

Bezeichnet man $\frac{b}{y} + 1$ mit z, so ist

$$D = ab \cdot \sqrt{\frac{z^3}{z-2}}$$

woraus $z = 3$ folgt; also $y = \frac{b}{2}$ und $v = 3b$. Demnach ist das kleinste Dreieck dasjenige, dessen Schwerpunkt in den der Ellipse fällt. Da $b + y = \frac{v}{2}$, so ersieht man: Die Seiten des Minimums werden von den drei Berührungspunkten der Ellipse halbirt. Da in dem Ausdrucke für den Inhalt des Minimums die Halbaxen in gleicher Weise vorkommen, so sind die Minima der beiden Systeme von Dreiecken, deren Grundlinien den beiden Axen parallel sind, einander gleich.

6. Welches ist der kleinste unter den elliptischen graden Kegeln, die einem dreiaxigen Ellipsoide so umgeschrieben werden können, daß die Grundfläche das Ellipsoid in einem seiner Scheitel berührt?

Auflösung. (Fig. 21.) $K = \frac{1}{3}\pi\alpha\beta \cdot v.$
Aus der Gleichung der Tangente AB an der Ellipse SGJ folgt für den Punkt B

$$\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{cz}{c^2} = 1 \text{ und daher } \alpha = \frac{a^2}{cx}(c + z)$$

entfernt man x mit Hülfe der Gleichung dieser Ellipse, so ist

$$\alpha = \frac{a(c+z)}{\sqrt{c^2 - z^2}} = a\sqrt{\frac{c+z}{c-z}}.$$

Dieselbe Tangente giebt für den Punkt A

$$\frac{(v-c)\,z}{c^2} = 1 \text{ also } z = \frac{c^2}{v-c}$$ und deshalb ist

$$\frac{c+z}{c-z} = \frac{v}{v-2c}$$

also $$\alpha = a\sqrt{\frac{v}{v-2c}}.$$

Ebenso findet man durch Betrachtung der Tangente AD

$$\beta = b\sqrt{\frac{v}{v-2c}}.$$

Daher $$K = \frac{\pi}{3} ab \frac{v^2}{v-2c}$$

also $v = 4c$ und $K = \frac{8}{3}\pi abc$. Es ergiebt sich, daß dieser Kegel doppelt so hoch und doppelt so groß ist, wie das Ellipsoid; ferner daß die Minima der drei Kegelgruppen, deren Grundflächen jedem der drei Hauptschnitte parallel sind, gleiche Größe haben, und endlich, daß hier, wie in der Ebene, die Minima diejenigen Figuren sind, deren Schwerpunkte mit dem der gegebenen Figur zusammenfallen.

V. Abschnitt.

Inhalt des Segmentes einer Parabel und eines Paraboloides. Inhalt der Ellipse und des Ellipsoides.

§. 28.

1. Wo muß man in einem gleichschenkeligen Dreiecke eine Parallele zur Grundlinie ziehen, damit dieselbe von der durch ihre Endpunkte gehenden Parabel, die ihren Scheitel im Halbirungspunkte der Grundlinie hat, ein möglichst großes Segment abschneide?

Auflösung. Man findet sehr leicht, daß die Parallele durch die Mitte der Schenkel gehen muß. Der Parameter

dieser Parabel $2p = \frac{h}{2} tg^2 \alpha$ (h die Höhe, 2α der Winkel an der Spitze des Dreiecks) ist leicht zu construiren: man errichtet und fällt vom Halbirungspunkte eines Schenkels nach der Höhe Lothe; das zwischen ihnen liegende Stück derselben ist der Parameter 2p. Das größte Segment ist ein Drittel des gegebenen Dreiecks.

2. Einem gegebenen graden Kegel das größte Segment eines Rotationsparaboloides einzuschreiben, welches mit dem Scheitel im Mittelpunkte des Grundkreises senkrecht steht.

Auflösung. Da das Segment des Paraboloides die Hälfte des Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe ist, so ergiebt sich ebenso leicht, daß der Schnitt hier nur ein Drittel der Höhe von der Basis entfernt sein muß. Der Parameter wird auf dieselbe Weise construirt, aber von einem Punkte aus, den man erhält, wenn man einen Schenkel unter die Grundlinie verlängert und ein Drittel des Schenkels darauf abträgt. Man verbinde den Scheitel P der Parabel mit den Endpunkten der Sehne DE, und bezeichne den Winkel an der Spitze A des Dreiecks mit 2α, die Höhe mit h. Das gesuchte Segment

$$S = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} (\tfrac{2}{3} h \, tg \, \alpha)^2 \cdot h$$

ist die Hälfte des vom Dreieck ADP beschriebenen Doppelkegels, während der Kegel PDE ein Drittel des Segmentes ist.

3. Der Mittelpunkt eines Kreises ist Scheitel von Parabeln, welche eine gemeinsame Axe haben und sich nach derselben Seite öffnen. Die Sehne, welche die Durchschnittspunkte einer Parabel und des Kreises verbindet, schließt mit der Parabel ein Segment ein. Wie groß ist der Parameter derjenigen Parabel, welche das Maximum der Segmente giebt?

Auflösung. Es ergeben sich die Coordinaten eines Durchschnittspunktes ganz leicht $x = r\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ und $y = r\sqrt{\tfrac{2}{3}}$; daher

ist auch $2p = r\sqrt{\frac{1}{2}}$. Diejenige Parabel also umschließt das größte Segment, welche durch die Eckpunkte des eingeschriebenen Quadrates geht, und ihr Parameter $2p$ ist gleich der halben Quadratseite. Der Inhalt des größten Parabelsegmentes ist $\frac{2}{3}r^2$, also ein Drittel des Quadrates.

4. Die Figur der vorhergehenden Aufgabe dreht sich um die Axe. Welche Parabel giebt dasjenige Paraboloid, dessen in der Kugel liegendes Segment möglichst groß ist?

Auflösung. Für das Maximum ist $x = r\sqrt{\frac{1}{3}}$. Dazu findet sich auch $p = r\sqrt{\frac{1}{3}}$. Demnach sind die Höhe des Segmentes und der halbe Parameter ein Drittel der Seite des gleichseitigen dem Kreise eingeschriebenen Dreiecks. Der Brennpunkt liegt in der Mitte der Höhe. Der durch den Brennpunkt geführte Querschnitt, der Grundkreis des Segmentes und der Erzeugungskreis der Kugel verhalten sich wie 1 : 2 : 3.

5. Der Mittelpunkt einer Ellipse ist Scheitel zweier Gruppen von Parabeln, die mit der Ellipse dieselben Axen haben. Welches sind die beiden Parabeln, von denen durch die mit der Ellipse gemeinsame Sehne das größte Segment abgeschnitten wird?

Auflösung. Es ergiebt sich, daß die Parabeln des Maximums beide durch denselben Punkt der Ellipse gehen ($x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, $y = b\sqrt{\frac{1}{2}}$), nämlich durch den Endpunkt des Durchmessers, welcher die Scheitelsehnen halbirt; und daß die beiden Segmente einander gleich sind, jedes $\frac{2}{3}ab$, also ein Drittel des Rhombus, dessen Ecken die Scheitel der Ellipse sind.

6. Die eben betrachtete Ellipse drehe sich 1) um die große und 2) um die kleine Axe. Wie verhalten sich die beiden Maxima der dadurch entstehenden Segmente der Paraboloide?

Auflösung. Das Maximum auf der großen Axe ist $\frac{\pi}{3}ab^2\sqrt{\frac{1}{3}}$ und das auf der kleinen $\frac{\pi}{3}a^2b\sqrt{\frac{1}{3}}$, sie verhalten sich

also umgekehrt wie die Axen. Die Ellipse wird von den beiden Parabeln, welche die größten Segmente geben, hier nicht in demselben Punkte geschnitten. Die Sehne, welche diese beiden Punkte verbindet, ist der Scheitelsehne parallel.

§. 29.

1. Ein Scheitel einer Ellipse ist gemeinsamer Scheitelpunkt von Parabeln, deren Axen mit der der Ellipse zusammenfallen. Man soll unter den die Ellipse schneidenden Parabeln diejenige ermitteln, von welcher die mit der Ellipse gemeinschaftliche Sehne das größte Segment abschneidet.

Auflösung. Da xy, also auch x^2y^2 ein Maximum werden soll, so hat man aus der Gleichung der Ellipse für den Scheitel als Anfang der Coordinaten sogleich den Ausdruck $2\frac{b^2}{a}x^3 - \frac{b^2}{a^2}x^4$, welcher für $x = \frac{3}{2}a$ ein Maximum ist. Nimmt man einen Scheitel der kleinen Axe als Scheitelpunkt einer zweiten Schaar von Parabeln, so wird das Maximum bei diesen ebenso groß, wie das bei der großen Axe, nämlich $ab\sqrt{3}$. In der Schaar für die große Axe hat die Parabel des Maximums einen Parameter, der ein Viertel des Parameters der Ellipse beträgt.

2. Dieselbe Aufgabe für den Raum.

Auflösung. Die Höhe des größten Segmentes bei der Rotation um die große Axe ist hier $x = \frac{4}{3}a$. Der Parameter dieser Parabel ist ein Drittel des Parameters der Ellipse. Die größten Segmente der beiden Gruppen der Paraboloide verhalten sich umgekehrt, wie die Axen der Ellipse, und jedes zu seinem Ellipsoide wie $2^2 : 3^2$.

3. Innerhalb einer Parabel ist auf ihrer Axe ein Punkt gegeben, welcher Scheitel von Parabeln werden soll, deren Zweige sich denen der gegebenen Parabel zuwenden. Von jeder

neuen Parabel wird durch die mit der gegebenen Parabel gemeinschaftliche Sehne ein Segment abgeschnitten. Wie groß ist der Parameter derjenigen Parabel, bei welcher das Segment am größten ist?

Auflösung. Man bezeichne den Abstand des gegebenen Punktes vom Scheitel mit m, in der gegebenen Parabel die Coordinaten eines Durchschnittspunktes mit x und y, und das Stück der Axe, welches x von m übrig läßt, mit z. Dann ist der Inhalt des zu betrachtenden Segmentes

$$S = \tfrac{4}{3} yz.$$

Da nun $y^2 = 2p(m - z)$, so sucht man das Maximum von

$$y^2 z^2 = 2p(m - z) z^2$$

woraus sich sofort ergiebt $z = \frac{2}{3} m$. Der Parameter der neuen Parabel ist die Hälfte des der gegebenen; und das größte Segment ist das Doppelte von dem, welches die gemeinsame Sehne von der gegebenen Parabel abgrenzt.

4. Wie groß aber ist der Parameter der Parabel, welche bei der Rotation um die Axe das größte paraboloidische Segment giebt?

Auflösung. Aus $S = \frac{\pi}{2} y^2 z = \pi p (m - z) z$ erhält man noch leichter $z = \frac{m}{2}$. Weil die Parameter gleich sind, so ist die neue Parabel der gegebenen congruent; ebenso die beiden Segmente.

5. Man soll zwischen einem in der Verlängerung der Axe einer Hyperbel gegebenen Punkte und ihrem Scheitel diejenige zur Axe senkrechte Sehne bestimmen, welche von der durch ihre Endpunkte gehenden und mit dem Scheitel im gegebenen Punkte ruhenden Parabel das größte Segment abschneidet.

Auflösung. Ist m der Abstand des gegebenen Punktes vom Mittelpunkte der Hyperbel, so hat man

$$S = \frac{4}{3}(m - x)\,y = \frac{4}{3}\frac{b}{a}(m - x)\sqrt{x^2 - a^2}$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man die Klammer auflöst (S. die Bemerkung in §. 18. Nr. II), die Abscisse der gesuchten Sehne

$$x = \frac{1}{4}(m + \sqrt{m^2 + 8a^2}).$$

Um diesen Ausdruck zu construiren, beschreibt man mit $3a$ um einen Scheitel der Hyperbel einen Kreis, verbindet einen der Durchschnittspunkte auf der Ordinatenaxe mit dem gegebenen Punkte, u. s. w.

6. Welche von den eben betrachteten Sehnen wird, wenn die Figur um die Hauptaxe rotirt, Grundkreis des größten paraboloidischen Segmentes?

Auflösung. Die Abscisse derselben ist

$$x = \frac{1}{3}(m + \sqrt{m^2 + 3a^2})$$

und der Parameter der zugehörigen Parabel verhält sich zu dem der Hyperbel, wie diese Abscisse zur Halbaxe a. Die Construction ist der obigen entsprechend.

§. 30.

1. Um ein Rechteck die kleinste Ellipse zu construiren.

Auflösung. Man bezeichne die Seiten des Rechtecks mit $2a$ und $2b$, die Halbaxen einer umgeschriebenen Ellipse mit α und β, so giebt

$$E = \pi\alpha\beta = \pi b \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - a^2}}$$

für das Minimum $\alpha = a\sqrt{2}$ und $\beta = b\sqrt{2}$, was leicht zu construiren ist.

2. Das kleinste Rotationsellipsoid um einen graden Cylinder zu bestimmen.

Auflösung. $E = \frac{4}{3}\pi\alpha^2\beta = \frac{4}{3}\pi a^2 \frac{\beta^3}{\beta^2 - b^2}$, also $\beta = b\sqrt{3}$, $\alpha = a\sqrt{\frac{3}{2}}$. Bei dem Minimum verhält sich $E : C = \sqrt{3} : 1$.

Es wird eine Kugel bei einem Cylinder, in welchem sich Durchmesser und Höhe verhalten wie Diagonale und Seite eines Quadrates.

Anmerkung. Soll man um einen elliptischen Cylinder das kleinste dreiaxige Ellipsoid legen, so hat man $E = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma = \frac{4}{3}\pi ab \frac{\gamma^3}{\gamma^2 - c^2}$, also $\gamma = c\sqrt{3}$, $\beta = b\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\alpha = a\sqrt{\frac{3}{2}}$; $E : C = \sqrt{3} : 1$.

3. Was für Winkel muß ein gleichschenkeliges Dreieck haben, damit das Minimum der Ellipsen, die man um den Scheitel als Mittelpunkt und durch die Endpunkte der Grundlinie beschreiben kann, ein Kreis sei?

Auflösung. Nennt man die Grundlinie $2g$, so ist $E = \pi g \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - h^2}}$, was $\alpha = h\sqrt{2}$ und $\beta = g\sqrt{2}$ giebt. Damit dies Minimum ein Kreis sei, muß man $g = h$ geben; das Dreieck muß ein rechtwinkeliges gleichschenkeliges Dreieck sein.

4. Um ein gleichschenkeliges Dreieck die kleinste Ellipse zu construiren.

Auflösung. Nennt man die Grundlinie $2g$, so ist $E = \pi\alpha\beta = \frac{\pi g}{\sqrt{h}} \cdot \frac{\beta^2}{\sqrt{2\beta - h}}$; $\beta = \frac{2}{3}h$, d. h. der Mittelpunkt (Schwerpunkt) der kleinsten Ellipse liegt im Schwerpunkte des Dreiecks.

5. Um einen graden elliptischen Kegel das kleinste dreiaxige Ellipsoid zu construiren.

Auflösung. $E = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma = \frac{4}{3}\pi\frac{ab}{c} \cdot \frac{\gamma^3}{2\gamma - c}$, daher $\gamma = \frac{3}{4}c$, also liegt der Mittelpunkt (Schwerpunkt) des kleinsten Ellipsoides im Schwerpunkte des Kegels; $E : K = 3^3 : 2^3$. Das Minimum wird eine Kugel bei einem auf kreisförmiger

Basis stehenden Kegel, in welchem sich Radius des Grundkreises und Höhe wie Seite und Diagonale eines Quadrates verhalten.

§. 31.

1. Welches ist der kleinste unter den elliptischen Kegeln, deren Mäntel über einen elliptischen Cylinder so gedeckt sind, daß die Peripherie seiner oberen Grundfläche in dem Kegelmantel liegt?

Auflösung. Die Halbaxen der Grundfläche des gegebenen schiefen Cylinders sind a und b, und seine Höhe h; entsprechend die eines übergedeckten Kegels x und y, und z.

$$K = \tfrac{1}{3}\pi xy \cdot z = \tfrac{1}{3}\pi\frac{b}{a}h \cdot \frac{x^3}{x - a}$$

ergiebt die Axen der Grundfläche 3a und 3b, und die Höhe 3h. Es verhält sich für das Minimum $K : C = 3^2 : 2^2$.

2. In einen Rhombus die größte Ellipse zu beschreiben.

Auflösung. Es seien 2a und 2b die Diagonalen des Rhombus ABCD und die zu bestimmenden Halbaxen der Ellipse α und β. Dann setzt man in $E = \pi\alpha\beta$ ein, was aus der Gleichung der Linie AB als Tangente der Ellipse für die Punkte A und B folgt, nämlich $\frac{ax'}{\alpha^2} = 1$ und $\frac{by'}{\beta^2} = 1$, also $E = \pi\sqrt{abx'y'}$. Endlich drückt man y' durch x' aus mittelst der Gleichung der Linie AB die von den Coordinataxen die Strecken a und b abschneidet, und hat dann

$$E = \pi b\sqrt{x'(a - x')}.$$

Daher $x' = \frac{a}{2}$ und $y' = \frac{b}{2}$. Die größte Ellipse berührt also den Rhombus in den Halbirungspunkten der Seiten. Ihre Halbaxen sind leicht zu construiren, da $\alpha = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ und $\beta = b\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist. Ihr Inhalt ist $M = \tfrac{1}{2}\pi ab$, also die Hälfte der um den Rhombus beschriebenen Ellipse, welcher dieselbe auch ähnlich ist.

3. In einen Doppelkegel, welcher durch Umdrehung eines Rhombus um eine Diagonale entstanden ist, das größte Rotationsellipsoid einzuschreiben.

Auflösung. Man hat hier $E = \frac{4}{3}\pi abx'\sqrt{1 - \frac{x'}{a}}$ und erhält $x' = \frac{2}{3}a$ und $y' = \frac{1}{3}b$. Die Ellipse, welche das Maximum beschreibt, theilt also von der Seite des Rhombus durch ihren Berührungspunkt zwei Drittel von der Rotationsaxe aus ab.

Anmerkung. Hätte man statt des Doppelkegels ein regelmäßiges Octaeder gegeben, dessen Kante k ist, so werden die Halbaxen des Maximums $\alpha = a\sqrt{\frac{2}{3}} = k\sqrt{\frac{1}{6}}$ und $\beta = b\sqrt{\frac{1}{3}} = k\sqrt{\frac{1}{6}}$ also $\alpha = \beta$. Es ist also die dem Octaeder eingeschriebene Kugel.

4. In ein gleichschenkeliges Dreieck die größte Ellipse einzuschreiben.

Auflösung. In das (stumpfwinkelige) gleichschenkelige Dreieck ABC zeichne man eine Ellipse, welche die Grundlinie BC in ihrem Halbirungspunkte O und den Schenkel AB in D berührt. Den Punkt O nehme man als Nullpunkt der Coordinaten, fälle von D auf BC die Ordinate y'; jede Hälfte der Grundlinie heiße g, die Höhe des Dreiecks h, die Halbaxen der Ellipse α und β. Die Gleichung der Tangente AB lautet, da O, und nicht der Mittelpunkt, der Anfangspunkt der Coordinaten ist,

$$\frac{xx'}{\alpha^2} + \frac{(y - \beta)(y' - \beta)}{\beta^2} = 1.$$

Daraus erhält man für den Punkt A

$$(h - \beta)(y' - \beta) = \beta^2, \text{ also } y' = \frac{h\beta}{h - \beta}$$

und für B $\quad \frac{gx'}{\alpha^2} - \frac{y'}{\beta} = 0$, also $x' = \frac{\alpha^2}{\beta}\,\frac{y'}{g}$.

Substituirt man diese Werthe der Coordinaten des Punktes

D in die Gleichung der Linie AB $\frac{x}{g} + \frac{y}{h} = 1$, so findet man $\alpha^2 = \left(1 - \frac{2\beta}{h}\right) g^2$. Nun soll $E = \pi\alpha\beta$, also auch $\alpha^2\beta^2$ ein Maximum werden. Man findet, daß es bei $\beta = \frac{h}{3}$ eintritt. Dazu ist $\alpha = g\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $x' = \frac{g}{2}$, $y' = \frac{h}{2}$. Die größte Ellipse berührt also alle drei Seiten in ihren Halbirungspunkten. Für das gleichseitige Dreieck ist das Maximum ein Kreis.

5. In einen graden Kegel das größte Rotationsellipsoid einzuschreiben.

Auflösung. $E = \frac{4}{3}\pi\alpha^2\beta = \frac{4}{3}\pi g^2\left(\beta - \frac{2\beta^2}{h}\right)$ giebt $\beta = \frac{h}{4}$ und $y' = \frac{h}{3}$. Der Berührungspunkt theilt ein Drittel des Schenkels vom Grundkreise aus ab.

Anmerkung 1. Soll man in einen elliptischen Kegel das größte dreiaxige Ellipsoid einschreiben, so macht man $\alpha^2\beta^2\gamma^2 = a^2b^2\left(\gamma - \frac{2\gamma^2}{c}\right)^2$ zu einem Maximum, und erhält $\gamma = \frac{c}{4}$.

Anmerkung 2. Beide Aufgaben (Nr. 4. und 5.) zeigen, daß das Maximum diejenige eingeschriebene Figur ist, deren Schwerpunkt mit dem der Hauptfigur zusammenfällt.

VI. Abschnitt.

Transscendente Gleichungen.

§. 32. Beispiel.

Man soll unter den Kreisen, die um einen Punkt in der Peripherie eines Kreises construirt werden können, denjenigen ermitteln, bei welchem der innerhalb des gegebenen Kreises liegende Bogen ein Maximum ist.

Auflösung. Man beschreibe um den in der Peripherie gegebenen Punkt P einen Kreis, der den gegebenen in A und B schneidet. Zunächst ist klar, daß, wenn der Radius x des Kreises um P von Null bis zum Durchmesser 2r des gegebenen Kreises wächst, der Bogen AB einmal am größten gewesen sein muß.

Man construire um P auch den Kreis mit dem Radius Eins, und nenne den Bogen desselben, welcher zwischen den unbegrenzten Schenkeln des Winkels APB liegt, 2φ; so verhält sich

$$AB : 2\varphi = x : 1$$

folglich ist $$AB = 2\varphi x = 4r\,\varphi \cos \varphi.$$

Demnach setzt man

$$\varphi \cos \varphi = \varphi_1 \cos \varphi_1.$$

Von beiden Seiten dieser Gleichung subtrahire man $\varphi_1 \cos \varphi$, dann erhält man aus

$$(\varphi - \varphi_1) \cos \varphi = \varphi_1 (\cos \varphi_1 - \cos \varphi)$$

sehr leicht

$$\cotg \varphi = \varphi.$$

Dies ist eine transscendente Gleichung, welche nun aufgelöst werden soll. Die Bestimmung der die Gleichung befriedigenden Werthe φ geschieht durch Versuche.

Ist (Fig. 22.) der Kreis um M mit dem Radius Eins beschrieben, so giebt bekanntlich der Zahlenwerth der Länge von

BK die Cotangente des Bogens AE an; und wir haben den Bogen φ zu ermitteln, für welchen

$$BK = AE$$

ist. Es springt in die Augen, daß ein solcher Bogen existirt. Die Betrachtung der Figur lehrt aber weiter, daß, wenn wir den Bogen AE wachsen lassen in die folgenden Quadranten hinein, auch für den dritten Quadranten CD ein die Gleichung befriedigender Bogen ABCF vorhanden ist, da der zunehmende Bogen (ABCF) einmal gleich der abnehmenden Cotangente (BL) werden muß. Sodann muß der Bogen bis in den fünften Quadranten AB′ vorschreiten, wenn ABCDAG = BN werden soll. Fährt man fort, den Bogen wie einen Faden um den Kreis herumzuwickeln, so trifft man passende Werthe in dem 7ten, 9ten, 11ten u. s. w., überhaupt im $(2k - 1)^{ten}$ Quadranten (wobei man für k jede ganze Zahl von Eins bis in's Unendliche denken soll.) Es giebt demnach unendlich viel Bogen, welche der Gleichung $\cotg \varphi = \varphi$ genügen. Ihre Endpunkte rücken dem Anfangspunkte A von oben her und dem Punkte C von unten her immer näher. Die Gleichung hat aber noch einmal unendlich viel Wurzeln. Denn man kann den Bogen vom Anfangspunkte A aus auch rückwärts, in der negativen Richtung ADCBAD.... herumwickeln. Für die negativen Bogen des negativ-ersten, dritten, ... allgemein $(2k - 1)^{ten}$ Quadranten (wobei k Null und jede negative ganze Zahl bedeutet) werden die Cotangenten auch negativ, aber in absoluter Größe den entsprechenden obigen gleich; man braucht ja nur die Figur um den Durchmesser BD herumzuklappen.

Während die algebraischen Gleichungen eine ganz bestimmte Anzahl von Wurzeln haben, kommt einer transscendenten Gleichung eine zweifach unbegrenzte Anzahl von Wurzeln zu.

In unserer geometrischen Aufgabe aber kann der Bogen φ nur kleiner als 90° sein. Wir haben deshalb nur den ersten Wurzelwerth zu ermitteln.

Da der Bogen von 45^0 unseres Kreises vom Radius Eins gleich $\frac{\pi}{4} = 0{,}78\ldots$ und $\text{cotg } 45^0 = 1$ ist, so muß der Bogen φ noch wachsen, damit die Cotangente kleiner wird. Es werde ein Versuch mit $\varphi = 50^0$ gemacht. Bei den ersten Rechnungen braucht man nur zwei oder drei Decimalstellen zu nehmen, weil ja nur Grenzen, zwischen denen φ liegt, aufgesucht werden sollen.

Es ist

$$\log \text{cotg } 50^0 = 9{,}92381 - 10$$

also $\text{cotg } 50^0 = 0{,}839$

dagegen $\text{arc } 50^0 = 0{,}873.$

Bei 50^0 ist also die Cotangente schon kleiner als der Bogen; deshalb muß φ zwischen 45^0 und 50^0 und zwar nahe bei 50^0 liegen.

Für 49^0:

$$\log \text{cotg } 49^0 = 9{,}93916 - 10$$
$$\text{cotg } 49^0 = 0{,}869$$
$$\text{arc } 49^0 = 0{,}855.$$

Hier ist die Cotangente um 0,014 zu groß, während sie vorher um 0,034 zu klein war. Um nun einen der gesuchten Wurzel näheren Zwischenwerth zu erlangen, schalten wir zwischen 49^0 und 50^0 die Minuten proportional jenen Abweichungen ein, und vernachlässigen die hierbei begangene Ungenauigkeit. Wir sagen: die gesammte Veränderung $(0{,}034 + 0{,}014)$, welche durch Uebergang von 50^0 auf 49^0 hervorgerufen ist, verhält sich zu der noch fortzuschaffenden (kleineren) Differenz $(0{,}014)$, wie die Aenderung des Bogens $(50^0 - 49^0 = 1^0 = 60')$, die jene Veränderung hervorrief, zu den noch fehlenden x Minuten, welche die Abweichung beseitigen können; also

$$0{,}048 : 0{,}014 = 60' : x'$$

woraus $x = 17\frac{1}{2}$ Minuten.

Demnach ist der dritte Versuch zu machen mit $49^0\ 17'\ 30''$.

$$\log \operatorname{cotg} 49^\circ\ 17'\ 30'' = 9{,}93469 - 10$$
$$\operatorname{cotg} 49^\circ\ 17'\ 30'' = 0{,}86038$$
$$\operatorname{arc}\ 49^\circ\ 17'\ 30'' = 0{,}86030.$$

Für diesen Bogen ist die Cotangente nur noch um 0,00008 zu groß, so daß der Bogen um wenige Secunden verlängert werden muß.

Hier, wie bei 49°, ist die Cotangente zu groß. Daher beträgt die durch Zuschlag der 17′ 30″ bewirkte Veränderung

$$0{,}014 - 0{,}00008 = 0{,}01392.$$

Wir setzen wie vorhin

$$0{,}01392 : 0{,}00008 = 17'\ 30'' : x''$$

oder $174 : 1 = 1050'' : x''$

folglich $x = 6''$.

Vierter Versuch. Näherungswerth 49° 17′ 36″.

$$\log \operatorname{cotg} 49^\circ\ 17'\ 36'' = 9{,}9346692 - 10$$
$$\operatorname{cotg} 49^\circ\ 17'\ 36'' = 0{,}8603382$$
$$\operatorname{arc}\ 49^\circ\ 17'\ 36'' = 0{,}8603309$$
$$\operatorname{cotg} - \operatorname{arc} = 0{,}0000073.$$

Die Interpolation ergiebt nun

$$x = 0,''\,6$$

für den fünften Versuch. Näherungswerth 49° 17′ 36,″ 6.

$$\log \operatorname{cotg} 49^\circ\ 17'\ 36,''\,6 = 9{,}9346666 - 10$$
$$\operatorname{cotg} 49\ \ 17'\ 36,''\,6 = 0{,}8603330$$
$$\operatorname{arc}\ 49^\circ\ 17'\ 36,''\,6 = 0{,}8603338$$
$$\operatorname{arc} - \operatorname{cotg} = 0{,}0000008$$

Jetzt ist die Cotangente zu klein geworden; der Zusatz von 0,6 Secunden war also zu viel. Es müssen, wie

$$(73 + 8) : 8 = 0,''\,6 : x''$$

ergiebt, 0,″06 davon abgezogen werden. Macht man nun die Probe mit 49° 17′ 36,″ 54, wobei man zur genauen Ermittelung der Länge des Bogens noch die achte Decimalstelle berücksichtigen möge, so erhält man für beide Größen

$$\operatorname{cotg} \varphi = \varphi = 0{,}8603336$$

bis auf 7 Decimalstellen übereinstimmend.

Demnach ist

$$\varphi = 49^0\ 17''\ 36,''\ 54$$

die gesuchte erste Wurzel der Gleichung.

Das Maximum der innerhalb des Kreises vom Radius r liegenden Bogen ist also $98^0\ 35'\ 13,''\ 08$ in einem Kreise, dessen Radius $x = 1,30437\,r$ ist, so daß seine Länge beträgt

$$M = 2,244386\,r.$$

Zusatz. Beschreibt man in gleicher Weise um einen Endpunkt der großen Axe einer Ellipse Kreise, so hat man den Ausdruck

$$4ab^2 \cdot \frac{\varphi \cos\varphi}{a^2 - e^2\cos^2\varphi}$$

zu einem Maximum zu machen. Es ergiebt sich, daß man φ bestimmen müßte aus der Gleichung

$$\frac{a^2 - e^2\cos^2\varphi}{a^2 + e^2\cos^2\varphi}\cot g\,\varphi = \varphi$$

die, wenn die Ellipse ein Kreis ist, in die obige einfache Gleichung übergeht.

§. 33.

1. Unter den innerhalb eines gegebenen Kreises liegenden Bogen aller Kreise, die einen Punkt seiner Peripherie zum Mittelpunkte haben, denjenigen zu ermitteln, auf welchem der größte Sector steht. (§. 32.)

Auflösung. $S = 4r^2 \cdot \varphi\cos^2\varphi$

ergiebt nach Subtraction von $\varphi_1 \cos^2\varphi$ leicht die Gleichung

$$\cot g\,\varphi = 2\varphi,$$

welche durch $\varphi = 37^0\ 25'\ 46,''\ 85$ befriedigt wird. Der Radius dieses größten Sectors ist $x = 1,5882\,r$.

2. Welcher von diesen Sectoren hat den größten Umfang?

Auflösung. Hier hat man die Gleichung zu lösen

$$\cot g\,\varphi = 1 + \varphi$$

aus der man findet

$$\varphi = 32^0\ 31'\ 53,''\ 43$$

und dazu $\qquad x = 1{,}6861916\ r.$

3. Es ist eine grade Linie und außerhalb derselben ein Punkt gegeben. Unter allen Kreisen, welche durch diesen Punkt gehen und die grade Linie schneiden, denjenigen zu finden, welcher auf der Seite des Punktes den kleinsten Bogen hat.

Auflösung. Von dem gegebenen Punkte P fälle man auf die Linie LN den Perpendikel PA. Unter denjenigen durch P gehenden Kreisen, deren Mittelpunkte in einer zu LN parallel laufenden Geraden sich befinden, hat offenbar der mit dem Mittelpunkte in dem Perpendikel PA liegende den kleinsten Bogen. Wir haben also nur die mit den Mittelpunkten in PA ruhenden Kreise zu betrachten.

Um der Deutlichkeit der Figur willen beschreibe man um einen zwischen A und P liegenden, etwa doppelt so weit von P als von A entfernten Punkt M mit MP = x einen Kreis, welcher die Linie LN in B und C schneiden möge, und nenne den von den Schenkeln des Winkels BMP eingeschlossenen Bogen des Kreises mit dem Radius Eins φ. Dann ist, wenn der Abstand des Punktes P von der Linie LN mit a bezeichnet wird,

$$\text{arc BPC} = 2\varphi x = \frac{2a\varphi}{1 - \cos\varphi} = a \cdot \frac{\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Man hat also von

$$\varphi \sin^2\frac{\varphi_1}{2} = \varphi_1 \sin^2\frac{\varphi}{2}$$

auf beiden Seiten $\varphi_1 \sin^2\frac{\varphi_1}{2}$ zu subtrahiren und die Differenz der Quadrate zu zerlegen. Man kommt auf die Gleichung

$$\text{tang}\,\frac{\varphi}{2} = \varphi$$

welche durch $\varphi = 133^0\ 33'\ 48,''\ 49$ befriedigt wird. Der Radius ist

$$x = 0{,}592011\ a$$

also die Entfernung AM $= 0{,}407989$ a.

Anmerkung. Für die Länge des Minimums ergiebt sich, wenn man $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ statt φ einsetzt,

$$M = 2 \frac{a}{\sin \varphi}.$$

Hieraus ist folgendes ersichtlich: Fällt man von P auf die verlängerten Radien BM und CM Perpendikel, die man bis zum Durchschnitt mit der Linie LN (in D und E) fortsetzt, so sind die beiden Hälften des kleinsten Bogens gleich den beiden graden Linien PD und PE.

§. 34.

1. Unter den Kreisen, welche die Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks in ihrem Halbirungspunkte berühren und die Schenkel schneiden, denjenigen zu finden, welcher innerhalb des Dreiecks den kleinsten Bogen hat.

Auflösung. In dem gleichschenkeligen Dreiecke ABC, welches an der Spitze A den Winkel 2α hat, werde nach dem Halbirungspunkte P der Grundlinie BC die Höhe AP gezogen, und um den in ihr liegenden Punkt M (der etwa $\frac{1}{3}$AP von der Spitze entfernt ist) mit dem Radius $MP = x$ ein Kreis beschrieben, welcher in D und E die Schenkel schneiden möge. Der Bogen des Kreises vom Radius Eins, dessen Centriwinkel gleich DMP ist, heiße φ; dann hat man

$$\text{arc } DPE = 2\varphi x = \frac{2h \sin \alpha \cdot \varphi}{\sin \alpha + \sin (\varphi - \alpha)}$$

wo h die Höhe des Dreiecks bezeichnet.

Man hat also

$$\varphi \sin \alpha + \varphi \sin (\varphi_1 - \alpha) = \varphi_1 \sin \alpha + \varphi_1 \sin (\varphi - \alpha)$$

und wenn man von beiden Seiten $\varphi_1 \sin (\varphi_1 - \alpha)$ subtrahirt, so ergiebt sich die Bestimmungsgleichung

$$\sin \alpha + \sin (\varphi - \alpha) = \varphi \cos (\varphi - \alpha)$$

die sich in der Gestalt

$$\frac{\sin\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)}+\operatorname{tg}(\varphi-\alpha)=\varphi$$

bequemer auflösen läßt.

Beispiel. Ist das gegebene Dreieck ABC ein gleichseitiges, so erhält man

$$\varphi = 44^\circ\ 56'\ 54,''\ 18$$

und den Radius $x = 0,6596752\,h$.

Hierdurch ist die Lage des Mittelpunktes bestimmt. Von den Punkten der Höhe, um welche Kreise, wie die Aufgabe verlangt, construirt werden können, ist der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises der erste. Sein Bogen D'PE' ist 1,2092 a, wenn a die Seite des gleichseitigen Dreiecks bezeichnet. Rückt der Mittelpunkt aus dieser Lage, $\frac{1}{3}h$ von der Grundlinie entfernt, weiter fort, so erreicht, wenn er kurz vor $\frac{2}{3}h$ ist, sein Bogen das Minimum, nämlich 0,7762702 a; läuft der Mittelpunkt von hier bis ins Unendliche, so nimmt der Bogen allmählig bis a zu.

Zusatz. Läßt man den Winkel an der Spitze des gleichschenkeligen Dreiecks sich zu beiden Seiten der Höhe vergrößern, bis er ein gestreckter geworden ist, so geht die Aufgabe in die vorhergehende (§. 33. Nr. 3.) über.

2. Um Punkte, die in einem Kreisradius und seiner Verlängerung liegen, beschreibe man mit ihren Abständen vom Mittelpunkte Kreise, welche den gegebenen schneiden. Die Sehne, welche zwei solche Durchschnittspunkte verbindet, schließt mit dem Bogen des neu construirten Kreises innerhalb des gegebenen ein Segment ein. Wie groß muß man den Radius des neuen Kreises wählen, damit das Segment ein Maximum werde?

Auflösung. Der zu dem betrachteten Segmente gehörige Centriwinkel stehe in dem Kreise vom Radius Eins auf dem Bogen 2φ; dann findet man aus einem rechtwinkeligen Dreiecke, welches ein Viertel des Centriwinkels ent-

hält, den Radius des Kreises, dem das Segment angehört, $x = \frac{r}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$; folglich ist der Inhalt des Segmentes

$$S = x^2 (\varphi - \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi) = \frac{r^2}{4} \cdot \frac{\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Von beiden Seiten der Gleichung

$$(\varphi - \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi) \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} = (\varphi_1 - \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi_1) \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

subtrahire man $(\varphi_1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_1) \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$; dann geht daraus hervor

$$(1 - \cos 2\varphi) \sin^2 \frac{\varphi}{2} = (\varphi - \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi) \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

oder $$4 \sin^2 \varphi \sin^2 \frac{\varphi}{2} = (\varphi - \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi) \sin \varphi.$$

Der Factor $\sin \varphi$ kann nicht gleich Null sein, weil sonst der Mittelpunkt im Unendlichen liegen und das Segment Null geben würde; daher

$$4 \sin \varphi \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi = \varphi$$

oder $$2 \sin \varphi (1 - \cos \varphi) + \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi = \varphi$$

und endlich $$4 \sin \varphi - \sin 2\varphi = 2\varphi.$$

Von den Wurzeln dieser Gleichung ist die erste, $\varphi = 0$, unzulässig; vielmehr genügt unserer Aufgabe die zweite

$$\varphi = 122^\circ\ 33'\ 57,''\ 73$$

und dieser Werth giebt den gesuchten Radius

$$x = 0,570123\ r.$$

3. Welche Sehne eines Kreises giebt mit einer gegebenen begrenzten Geraden als parallele Seiten das größte Trapez?

Auflösung. Heißt die gegebene Linie a, ihr Abstand vom Mittelpunkte m, und der zu der veränderlichen Sehne gehörige Centriwinkel 2φ, so ist der Inhalt

$$T = \tfrac{1}{2}(a + 2r \sin \varphi)(m + r \cos \varphi).$$

Dies führt zu der Gleichung

$$r \cos 2\varphi + m \cos \varphi = \frac{a}{2} \sin \varphi$$

woraus sich φ, wenn $\frac{a}{2}$, m und r willkürliche Werthe haben, nur mit vieler Mühe ermitteln ließe. Deshalb specielle Fälle:

a) $\frac{a}{2} = r.$

$$\cos 2\varphi + \frac{m}{r} \cos \varphi = \sin \varphi$$

$$\frac{\sin \varphi - \cos 2\varphi}{\cos \varphi} = \frac{m}{r}$$

wofür wir setzen

$$\frac{\sin \varphi - \sin (90^\circ - 2\varphi)}{\sin (90^\circ - \varphi)} = \frac{m}{r}$$

$$\frac{\sin \left(3\frac{\varphi}{2} - 45^\circ\right)}{\sin \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{m}{r}$$

Es ist aber $\sin \left(3\frac{\varphi}{2} - 45^\circ\right) = \cos \left(90^\circ - 3\frac{\varphi}{2} + 45^\circ\right) = \cos 3 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$, mithin, wenn wir $45^\circ - \frac{\varphi}{2}$ mit ψ bezeichnen,

$$\frac{\cos 3\psi}{\sin \psi} = \frac{m}{r},$$

woraus man den Winkel sehr bequem durch Versuche ermitteln kann.

Ist z. B. $m = \frac{1}{2} r$, so findet sich aus

$\frac{\cos 3\psi}{\sin \psi} = \frac{1}{2}$ $\quad \psi = 25^\circ\ 48'\ 32,''\ 2$ und daher

$\varphi = 38^\circ\ 22'\ 55,''\ 6.$

Für $m = 0$ ist $\psi = 30^\circ$ und $\varphi = 30^\circ$, d. h. das größte unter den Trapezen, deren Grundlinie der Durchmesser ist, hat die zweite Parallele gleich dem Radius. Es ist das halbe regelmäßige Sechseck.

b) Es sei m = r, dann wird aus

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi = \frac{a}{2r}\sin\varphi$$

$$\frac{\sin 3\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{a}{2r}.$$

c) Ist $\frac{a}{2} = m = r$, so hat man aus a) oder aus b) $\varphi = 45°$, d. h. von den Trapezen, deren Grundlinie ein dem Durchmesser gleiches Stück einer Tangente ist, hat das größte als zweite Parallele die Seite des eingeschriebenen Quadrates.

d) Ist m = 0, und $\frac{a}{2}$ und r beliebig groß, so hat man

$$1 - 2\sin^2\varphi = \frac{a}{2r}\sin\varphi$$

$$\sin\varphi = -\frac{a}{4r} + \sqrt{\left(\frac{a}{4r}\right)^2 + 1}.$$

Mit r multiplicirt, giebt diese Gleichung die Construction an. Will man φ bequem berechnen, so setze man $\frac{a}{4r} = \operatorname{cotg}\gamma$, dann findet man φ aus

$$\sin\varphi = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

e) Ist die gegebene Linie eine Sehne oder eine der zugehörigen Sehne gleiche Strecke einer Secante, so hat man die Aufgabe §. 22. Nr. 2.

Anmerkung. Noch ein Beispiel für die Auflösung durch Versuche ist §. 36. Nr. 1. Anmerkung.

VII. Abschnitt.

Kubische Gleichungen.

§. 35.

1. Durch den Mittelpunkt eines Würfels ist parallel mit vier Kanten eine unbegrenzte Linie gezogen. Von je zwei gleich weit vom Mittelpunkte entfernten Punkten derselben, die außerhalb des Würfels liegen, sollen Linien durch die ihnen zunächst liegenden Ecken des Würfels gelegt werden, wodurch ein Octaeder bestimmt wird. Bei welchem Octaeder ist die Oberfläche ein Minimum. (Vergl. §. 14. Nr. 4.)

Auflösung. Die vier von dem einen gewählten Punkte durch die Ecken gezogenen Linien schneiden die vier von der andern Seite kommenden in vier Punkten, welche die Ecken eines Quadrates sind. Die Seite desselben heiße x; der Abstand der angenommenen Punkte vom Mittelpunkte y und die Seite des Würfels a; dann ist die Oberfläche

$$F = 4x\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2} = 2x\sqrt{x^2 + a^2\left(\frac{x}{x-a}\right)^2}$$

Man wird auf die Gleichung

$$(x - a)^3 + \tfrac{1}{2}a^2(x - 2a) = 0$$

geführt, die, wenn man durch a^3 dividirt und $\frac{x}{a} - 1 = z$ setzt, die Gestalt

$$z^3 + \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2} = 0$$

annimmt.

Die Auflösung (nach der Cardanischen Formel mit Hülfe trigonometrischer Functionen) ergiebt

$$z = 0{,}5897547$$

also $\quad x = 1{,}5897547\,a$ und dazu

$$y = 1{,}347841\,a.$$

Anmerkung. Das Minimum ist höher, als das auf demselben Quadrate stehende regelmäßige.

2. Von welchem Punkte der Verlängerung der Axe eines auf einem regelmäßigen n=Ecke stehenden geraden Prismas muß man durch die nächsten Ecken Linien bis zur Erweiterung der Grundfläche herunterziehen, damit die durch die n Linien als Kanten bestimmte grade Pyramide mittelst der kleinsten Seitendreiecke das Prisma überdecke?

Auflösung. Die Rechnung ist der unter Nr. 1 ganz entsprechend; denn es ist hier der Inhalt eines Seitendreiecks

$$D = \tfrac{1}{2}x^2 \sqrt{\left(\frac{h}{x-a}\right)^2 + \frac{c^2}{4}}$$

wo $\cot g \frac{180^0}{n}$ mit c bezeichnet wird. Man kommt, wenn man $x - a = z$ setzt, auf die Gleichung

$$z^3 - \frac{2h^2}{c^2}z - \frac{2ah^2}{c^2} = 0.$$

Anmerkung. Sucht man den kleinsten Kegelmantel, mit dem man einen Kreiscylinder überdecken kann, so hat man, für $x - r = z$, die Gleichung

$$z^3 + \frac{h^2}{2}z - \frac{h^2}{2}r = 0$$

welche in dem Falle, daß $h = r$ ist, in die unter Nr. 1. aufgelöste übergeht.

3. Unter den gleichschenkeligen Dreiecken, die man so um eine Ellipse beschreiben kann, daß die Grundlinie dieselbe in einem Scheitel berührt, dasjenige zu bestimmen, welches die kleinsten Schenkel hat. (§. 27. Nr. 5.)

Auflösung. Bei derselben Bezeichnung, wie §. 27. Nr. 5., ist, wenn man wieder $\frac{b}{y} + 1 = z$ setzt, die Länge eines Schenkels

$$s = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{a^2 \frac{z}{z-2} + b^2z^2}$$

woraus sich ergiebt

$$z^3 - 4z^2 + 4z - \frac{a^2}{b^2} = 0.$$

1. Beispiel. Es sei die gegebene Ellipse von der Gestalt, daß sich die Axen wie die Höhe und halbe Seite eines gleichseitigen Dreiecks verhalten ($a = b\sqrt{3}$). In diesem Falle gehen die Wurzeln in der Cardanischen Formel auf. Die Gleichung

$$z^3 - 4z^2 + 4z - 3 = 0$$

reducirt sich auf

$$t^3 - \tfrac{4}{3}t - \tfrac{65}{27} = 0$$

und man erhält $t = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$, $z = 3$, $y = \frac{b}{2}$, $u = a\sqrt{3} = 3b$ und $v = 3b$; $u = v$ lehrt, daß bei einer Ellipse von jener Form, das Dreieck mit den kleinsten Schenkeln ein rechtwinkeliges ist. Die Ellipse berührt die drei Seiten in den Halbirungspunkten.

2. Beispiel. Verhalten sich die Axen der Ellipse wie Diagonale und Seite eines Quadrates, so ergiebt die Gleichung $z^3 - 4z^2 + 4z - 2 = 0$ durch Auflösung von $t^3 - \frac{4}{3}t - \frac{38}{27} = 0$ mittelst trigonometrischer Functionen aus der Cardanischen Formel $z = 2{,}8392867$. Der Berührungspunkt des Schenkels ist bestimmt durch $y = 0{,}543689\,b$. Der Winkel an der Spitze dieses gleichschenkeligen Dreiecks beträgt $84^\circ\ 59'\ 14''$.

§. 36.

1. Einer Halbkugel den größten abgestumpften Kegel einzuschreiben.

Auflösung. Um die Figur zu erhalten, zeichne man über der Linie AB einen Halbkreis, ziehe in demselben eine Sehne CD parallel mit AB, und vollende das Viereck ABCD; dasselbe beschreibt bei der Drehung um eine durch den Mittelpunkt senkrecht zu AB gehende Linie einen abgestumpften Kegel, dessen Volumen betrachtet werden soll.

Der spitze Winkel, welchen der Radius CM mit dem Durchmesser bildet, heiße φ, und der Radius der Halbkugel r; dann ist der Inhalt des abgestumpften Kegels

$$K = \frac{\pi}{3} r^3 \sin\varphi\,(1 + \cos\varphi + \cos^2\varphi)$$

$$K = \frac{\pi}{12} r^3 (5 \sin \varphi + 2 \sin 2 \varphi + \sin 3 \varphi)$$

Man kommt auf die Gleichung

$$5 \cos \varphi + 4 \cos 2 \varphi + 3 \cos 3 \varphi = 0$$

deren Coefficienten mit denen des Winkels φ eine regelmäßige Folge bilden.

Drückt man diese Cosinus durch die Potenzen des $\cos \varphi$, der mit z bezeichnet werden möge, aus, so hat man

$$3z^3 + 2z^2 = z + 1.$$

Da in der reducirten Gleichung

$$x^3 - 3 \cdot \tfrac{13}{81} x - 2 \cdot \tfrac{173}{1458} = 0$$

$b^2 > a^3$ ist, so giebt die Cardanische Formel die Auflösung, die man mit trigonometrischen Functionen leicht bewerkstelligt; wo man dann findet

$$x = 0{,}8687108,\ z = 0{,}6464886 \text{ und also}$$

$$\varphi = 49^\circ\ 43'\ 21{,}''4.$$

Anmerkung. Die Gleichung

$$5 \cos \varphi + 4 \cos 2 \varphi + 3 \cos 3 \varphi = 0$$

läßt sich umformen, um für die Auflösung durch Versuche eine zur logarithmischen Rechnung bequemere Gestalt zu erlangen. Man drücke nur $\cos 3 \varphi$ durch den Cosinus des einfachen Winkels, und $\cos \varphi - \cos 2 \varphi$ durch $2 \sin 3 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}$ aus, so gelangt man zu

$$\frac{\cos^3 \varphi}{\sin 3 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}} = \tfrac{2}{3}.$$

Dieselbe giebt für $\varphi = 49^\circ\ 43'\ 21{,}''49$ bis auf die 7. Decimalstelle übereinstimmende Werthe.

2. Bei welchem von diesen Kegeln ist die Oberfläche ein Maximum? (Welcher Kegel den größten Mantel hat, ist schon §. 15. Nr. 5. untersucht worden.)

Auflösung. Hier hat man, wenn man $\sin \frac{\varphi}{2}$ mit x bezeichnet, die Gleichung

$$4x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

aufzulösen, welche ein Beispiel für den irreduciblen Fall ist. Man erhält, nach Beseitigung des quadratischen Gliedes der Unbekannten für die Gleichung

$$y^3 - \tfrac{11}{16} y + \tfrac{3}{32} = 0$$

als erste Wurzel $y_1 = \frac{3}{4}$

mithin $y_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{8}$ und $y_3 = \dfrac{-3 - \sqrt{17}}{8}$; also

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{8},\ x_3 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{8}.$$

Von diesen Werthen ist aber bei dem ersten, $x = \sin\frac{\varphi}{2} = 1$, (also $\varphi = 180^\circ$), der Kegel verschwunden, und bei dem Dritten $\frac{\varphi}{2} > 180^\circ$, was den Inhalt des Kegels negativ machen würde. Mithin bleibt der einzige

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{8}$$

als derjenige, welcher dem gesuchten Maximum entspricht; und dieser giebt $\varphi = 45^\circ\ 57'\ 26,''3$. Die Gleichung, mit $2r$ multiplicirt, $2r \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4}[-r + \sqrt{(4r)^2 + r^2}]$, lehrt die Seite des abgestumpften Kegels construiren.

3. Um den Scheitelpunkt einer gegebenen Parabel als Mittelpunkt ist eine Ellipse beschrieben, deren große Axe mit der der Parabel zusammenfällt. Nun soll, während die große Axe constant bleibt, die veränderliche kleine Axe so bestimmt werden, daß das Segment, welches von der Ellipse durch die mit der Parabel gemeinschaftliche Sehne abgeschnitten wird, bei der Rotation um die große Axe das Maximum der ellipsoidischen Segmente beschreibe.

Auflösung. Man nehme den innerhalb der Parabel liegenden Scheitel der Ellipse zum Anfangspunkte rechtwinkeliger Coordinaten; bezeichne die gegebene große Halbaxe der Ellipse mit α, ihre veränderliche kleine Halbaxe mit β, so ist der Inhalt des Segmentes

$$S = \frac{\pi}{3} \frac{\beta^2}{a^2} x^2 (3a - x).$$

Nun läßt sich y^2 einmal aus der Scheitelgleichung der Ellipse bestimmen $y^2 = \frac{\beta^2}{a^2} x (2a - x)$, und zweitens aus der Parabel $y^2 = 2p. (a - x)$. Den durch Gleichsetzung hervorgehenden Werth von β^2 substituirt, giebt

$$S = \frac{\pi}{3} \cdot 2p \cdot \frac{x (a - x) (3a - x)}{(2a - x)}.$$

Zur Abkürzung sei der Nenner $2a - x = z$, so ist

$$S = \frac{\pi}{3} \cdot 2p \cdot \frac{(2a - z) (z - a) (z + a)}{z}$$

woraus $$z^3 - az^2 - a^3 = 0$$

hervorgeht. Um die umständliche Rechnung zur Entfernung des quadratischen Gliedes zu vermeiden, dividire man durch z^3 und setze $\frac{a}{z} = u$, so hat man

$$u^3 + u - 1 = 0.$$

Diese Gleichung löse man durch die Cardanische Formel mit Hülfe trigonometrischer Functionen auf. Dies ergiebt

$u = 0{,}6823277$ und daher $z = 1{,}4655712\,a$

und $x = 0{,}5344288\,a$.

Demnach wird die gesuchte Halbaxe

$$\beta = 0{,}7709828 \sqrt{2p \cdot a}$$

und der Parameter dieser Ellipse $2\varphi = 1{,}1888288 \cdot 2p$.

VIII. Abschnitt.

Schwierige Aufgaben.

§. 37.

1. Den Durchmesser eines gegebenen Halbkreises theile man in zwei Stücke und beschreibe über jedem einen Halbkreis. In der Fläche, welche übrig bleibt, wenn man diese beiden

Halbkreise aus dem gegebenen herausschneidet, construire man einen ganzen Kreis, welcher alle drei Halbkreisbogen berührt. Nimmt man auch diesen aus der Fläche heraus, so behält man noch drei von Kreisbogen begrenzte dreieckige Figuren. Man soll nun die Radien der drei neuen Kreise der Bedingung gemäß bestimmen, daß die drei krummlinigen Dreiecke zusammengenommen ein Maximum oder Minimum werden.

Auflösung. Der Radius des gegebenen Halbkreises heiße r, die der zu construirenden x und y, und der des ganzen Kreises z. Man verbinde alle vier Mittelpunkte mit einander, so wird das durch die Seiten $(x+y)$, $(x+z)$ und $(y+z)$ eingeschlossene Dreieck von dem durch den Mittelpunkt des ganzen Kreises gehenden Radius r in zwei Dreiecke getheilt. Aus diesen ergeben sich, wenn man die Winkel, welche letzterer Radius r mit dem Durchmesser des Halbkreises bildet, φ und $(180^0 - \varphi)$ nennt, für die Quadrate der ihnen gegenüberliegenden Seiten $(x + z)$ und $(y + z)$ zwei Gleichungen, aus denen man $\cos\varphi$ eliminiren kann. In der so gewonnenen Gleichung schreibt man, da $2x + 2y = 2r$ ist, $r - x$ für y, und erhält nun

$$(1.) \qquad z = \frac{rx\,(r - x)}{x^2 - rx + r^2}.$$

Diesen Ausdruck setze man nicht in die zu betrachtende Flächensumme F

$$F = \pi\left(\frac{r^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - z^2\right) = \pi\,(rx - x^2 - z^2)$$

ein, sondern entwickele

$$rx - x^2 - z^2 = rx_1 - x_1^2 - z_1^2$$

$$(2.) \quad r - (x + x_1) - \frac{z - z_1}{x - x_1}\,(z + z_1) = 0$$

und berechne den Quotienten $\frac{z - z_1}{x - x_1}$ aus Gleichung (1.) besonders

$$z - z_1 = \frac{rx\,(r - x)}{x^2 - rx + r^2} - \frac{rx_1\,(r - x_1)}{x_1^2 - rx_1 + r^2}.$$

Man erhält, wenn man die Brüche gleichnamig macht, nach leichtem Zusammenziehen

$$\frac{z - z_1}{x - x_1} = \frac{r^3 [r - (x + x_1)]}{(x^2 - rx + r^2)(x_1^2 - rx_1 + r^2)}$$

folglich wird die Gleichung (2.)

$$r - (x + x_1) - \frac{r^3 [r - (x + x_1)]}{(x^2 - rx + r^2)(x_1^2 - rx_1 + r^2)}(z + z_1) = 0.$$

Setzt man nun $x_1 = x$ und nachher für z seinen Werth aus (1.), so kommt man zu der Gleichung

$$(r - 2x)\left[1 - \frac{2r^4 x (r - x)}{(x^2 - rx + r^2)^3}\right] = 0.$$

Der erste Factor, gleich Null gesetzt, giebt $x = \frac{r}{2}$, und dazu $y = \frac{r}{2}$ und $z = \frac{r}{3}$. Der zweite Factor giebt die Gleichung

$$(x^2 - rx + r^2)^3 + 2r^4 (x^2 - rx) = 0$$

die man durch r^6 dividiren möge, um zur Abkürzung

$$(3.) \qquad \frac{x^2}{r^2} - \frac{x}{r} + 1 = u$$

zu setzen. Dann ist

$$u^3 + 2(u - 1) = 0.$$

Die einzige reelle Wurzel ist

$$u = 0{,}770917.$$

Daher ergiebt sich aus (3.)

$$x_1 = 0{,}6446271\ r$$
$$x_2 = 0{,}3553729\ r$$

und wir haben folgendes Resultat:

Die von dem gegebenen Halbkreise übrig bleibenden drei Stücke wachsen, von Null anfangend, wenn der Kreis vom Radius x gleich Null ist, bis zu einem Maximum

$$M = 0{,}1407794\ r^2\pi$$

bei $x = 0{,}3553729\,r$. Hierauf nimmt ihre Summe wieder ab, und wird zu einem Minimum

$$m = 0{,}1388889\ r^2\pi$$

für $x = 0{,}5\,r$; nun vergrößert sie sich wieder, dem Vorigen symmetrisch, bis zum Maximum

$$M = 0{,}1407794\, r^2 \pi$$

bei $x = 0{,}6446271\, r$ und dann nimmt sie ab bis Null für $x = r$.

Die Maxima liegen zu beiden Seiten des Mittelpunktes gleich weit vom Minimum entfernt; denn ist $x = x_1$, so ist $y = x_2$ und ist $x = x_2$ so ist $y = x_1$.

2. Unter allen Kugelausschnitten von gleichem Inhalte, der als eine Kugel vom Radius r gegeben ist, diejenigen zu bestimmen, deren Oberfläche ein Maximum oder ein Minimum ist.

Auflösung. Der Radius der Kugel, welcher ein Sector von der vorgeschriebenen Größe angehört, heiße ρ und die Höhe des zugehörigen Segmentes x; dann ist die Oberfläche

$$F = 2\pi\rho x + \pi\rho \sqrt{2\rho x - x^2}$$

und es findet sich aus dem gegebenen Inhalte

$$x = \frac{2r^3}{\rho^2}$$

mithin hat man

$$F = 2\pi r^2 \left[\frac{2r}{\rho} + \sqrt{\frac{\rho}{r} - \frac{r^2}{\rho^2}}\right]$$

woraus hervorgeht

$$\rho_1 = r\sqrt[3]{10} \text{ und } \rho_2 = r\sqrt[3]{2}.$$

Um zu erfahren, welcher Radius ρ dem Maximum und welcher dem Minimum angehört, setzen wir diese Werthe in den Ausdruck der Fläche ein:

$$\rho_1 = r\sqrt[3]{10} \text{ giebt } F_1 = \pi\rho_1^2 = \pi r^2 \sqrt[3]{100}$$

dieser Sector hat die Segmenthöhe $x_1 = \frac{1}{5} r \sqrt[3]{10} = \frac{1}{5}\rho_1$

und $\rho_2 = r\sqrt[3]{2}$ giebt $F_2 = 3\pi\rho_2^2 = \pi r^2 \sqrt[3]{108}$, bei welcher die Höhe der Calotte $x_2 = \rho_2$ sich findet.

Es zeigt sich also: Verfolgt man den Kugelradius, wie er alle möglichen Werthe durchläuft, so fangen dieselben natürlich erst bei $\rho = r$ an, was der Ausdruck der Fläche F

auch erkennen läßt; $x = 2r$ bestätigt, daß der Sector hier sich zu einer vollständigen Kugel (der gegebenen) geschlossen hat. Wächst der Radius, so ist anfangs der Sector ein solcher, dessen Centriwinkel ein überstumpfer ist. Die Oberfläche nimmt zu, bis der Sector eine Halbkugel geworden ist

$$\rho_2 = 1,259921\,r = x_2$$

und hat hier das Maximum $F_2 = 4,7622\,\pi r^2$ erreicht. Vergrößert der Kugelradius sich weiter, so wird die Oberfläche des Ausschnittes, der jetzt einen spitzen Centriwinkel hat, wieder kleiner, wovon man sich durch Berechnung eines Zwischenwerthes, wie z. B. für $\rho = 1,5\,r$, überzeugt. Die Oberfläche sinkt zu einem Minimum $F_1 = 4,64159\,\pi r^2$ bei

$$\rho_1 = 2,154434\,r;$$

wo der Sector eine solche Gestalt hat, daß die Höhe seines Segmentes nur noch ein Fünftel des Kugelradius ist. Bei weiterem Verlängern des Radius vergrößert sich auch wieder die Oberfläche, und zwar bis in's Unbegrenzte; denn in dem Ausdrucke für die Fläche F verschwindet der Subtrahendus unter der Wurzel mehr und mehr, während der Minuendus zunimmt. Die Gestalt, in welche der Sector übergeht, läßt sich als eine unendlich lange außerordentlich feine Nadel bezeichnen.

3. Unter allen Kugelausschnitten von gleicher Oberfläche, welche als eine Kugelfläche vom Radius r gegeben ist, diejenigen zu finden, deren Inhalt ein Maximum oder Minimum ist.

Auflösung. Der Ausdruck für die gegebene Fläche

$$2\pi\rho x + \pi\rho\sqrt{(2\rho - x)\,x} = 4\pi r^2$$

giebt die Höhe x des zum Sector gehörigen Segmentes

$$x = \frac{1}{5}\left\{\frac{8r^2}{\rho} + \rho \pm \sqrt{16r^2 + \rho^2 - 16\frac{r^4}{\rho^2}}\right\}$$

mithin ist der Inhalt des Sectors

$$S = \frac{2}{15}\pi\left\{8r^2\rho + \rho^3 \pm \sqrt{16r^2\rho^4 + \rho^6 - 16r^4\rho^2}\right\}$$

In der hieraus hervorgehenden Gleichung hebt sich ρ^6 und ρ^6 fort, und sie wird ganz einfach

$$\rho^4 - \tfrac{16}{3} r^2 \rho^2 + \tfrac{16}{3} r^4 = 0$$

also $\rho_1 = 2r$ und $\rho_2 = 2r\sqrt{\tfrac{1}{3}}$.

Zu jedem dieser Radien erhält man zwei Ausdrücke für x, nämlich

$$x_1' = 2r = \rho_1 \text{ und } x_1'' = \tfrac{2}{5} r = \tfrac{1}{5}\rho_1$$

sowie $x_2' = \tfrac{6}{5}\sqrt{3}\,r$ und $x_2'' = 2r\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \rho_2$.

Es muß also untersucht werden, welche von diesen Größen das Maximum oder das Minimum liefern. Aus

$$S = \tfrac{2}{3}\pi\rho^2 x$$

hat man, wenn mit K der Inhalt der gegebenen Kugel bezeichnet wird,

1) für ρ_1 und x_1' $S_1' = 4\,K \quad = 4\,K$
2) für ρ_1 und x_1'' $S_1'' = \tfrac{4}{5}\,K \quad = 0{,}8\,K$
3) für ρ_2 und x_2' $S_2' = \tfrac{4}{5}\sqrt{3}\,K = 1{,}3856405\,K$
4) für ρ_2 und x_2'' $S_2'' = \tfrac{4}{9}\sqrt{3}\,K = 0{,}7698003\,K$.

Es zeigt sich, daß der erste Werth S_1' am größten, und der vierte S_2'' am kleinsten ist. Daß dieselben wirklich ein Maximum und Minimum, die beiden andern aber nicht auszuzeichnende Werthe sind, übersieht man erst ganz deutlich, wenn man die Function graphisch darstellt. Dazu setze man $r = 1$ und bezeichne $\dfrac{15}{2\pi} S$ mit y

$$y = \rho \left\{8 + \rho^2 \pm \sqrt{\rho^4 + 16(\rho^2 - 1)}\right\}$$

trage ρ als Abscisse und die dazu gehörigen y als Ordinaten auf. Die Curve fängt bei der Abscisse an, welche die Wurzel zu Null macht,

$$\rho = 0{,}9717366$$

wo dann y den einzigen Werth

$$y = 8{,}6911$$

hat. Von diesem Punkte aus läuft die Curve nach oben und unten. Es ist klar, daß in dem oberen Zweige, welcher durch das Pluszeichen vor der Wurzel bestimmt wird, kein Maximum oder Minimum vorkommt; er läuft steil hinauf, hoch über die positive Richtung der Abscissenaxe hin, in's Unendliche. Der nach unten gehende Zweig biegt sogleich um, und hat hier bei

$$\rho_2 = 1{,}1547006$$

sein Minimum $y = 7{,}698$. Die Curve steigt nun ein wenig an, erreicht für $\rho_1 = 2$ das Maximum $y = 8$ und senkt sich hierauf langsam hinab, um den positiven Theil der Abscissenaxe zur Asymptote zu haben.

Uebrigens ist zu bemerken, daß die Gestalt des Maximums und Minimums dieselbe, wie in der vorhergehenden Aufgabe ist, nur daß hier, umgekehrt, das Minimum eine Halbkugel und das Maximum ein Sector ist, in welchem der das Segment abschneidende Grundkreis einen Abstand $\frac{4}{5}r$ vom Mittelpunkte hat.

§. 38.

1. Zwischen dem Scheitel eines graden Kegels und einem in der Entfernung m von ihm in der Axe liegenden Punkte soll ein zur Axe senkrechter Durchschnitt gelegt werden, welcher Grundkreis eines mit dem Scheitel in dem gegebenen Punkte ruhenden Kegels wird. Wo ist der Durchschnitt in dem gegebenen Kegel, dessen Axe mit der Seitenlinie den Winkel α bildet, zu legen, damit die Oberfläche dieses so eingeschriebenen Kegels ein Maximum oder Minimum werde? (Vergl. §. 24. Nr. 1. Anmerkung und Nr. 2.)

Auflösung. Bildet die Seitenlinie eines solchen Kegels mit der Axe des gegebenen den spitzen Winkel φ, so ist die Oberfläche F

$$F = \pi m^2 \sin^2\alpha \cdot \frac{\sin\varphi\,(1 + \sin\varphi)}{\sin^2(\alpha + \varphi)}$$

also

$$(\sin\varphi + \sin^2\varphi)\sin^2(\alpha + \varphi_1) = (\sin\varphi_1 + \sin^2\varphi_1)\sin^2(\alpha + \varphi).$$

Man subtrahire hier $(\sin\varphi_1 + \sin^2\varphi_1)\sin^2(\alpha + \varphi_1)$ von beiden Seiten, zerlege die Differenzen der Quadrate, so läßt sich, wenn man, nach Division mit $\sin\frac{\varphi - \varphi_1}{2}$, $\varphi_1 = \varphi$ setzt, $\sin(\alpha + \varphi)$ als Factor absondern, und da dieser nicht gleich Null sein kann, so hat man

$(1+2\sin\varphi)\sin(\alpha+\varphi)\cos\varphi = 2(1+\sin\varphi)\cos(\alpha+\varphi)\sin\varphi.$
Nun ist aber $2(1+\sin\varphi) = 1 + (1+2\sin\varphi)$, also

$$(1+2\sin\varphi)\sin\alpha = \cos(\alpha+\varphi)\sin\varphi$$

und wenn man $\cos(\alpha+\varphi)$ auflöst,

$$(1+2\sin\varphi+\sin^2\varphi)\sin\alpha = \tfrac{1}{2}\cos\alpha\sin 2\varphi$$

mithin

$$\frac{\sin 2\varphi}{(1+\sin\varphi)^2} = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Dieser Ausdruck läßt sich aber zur bequemeren Berechnung noch auf folgende Weise umformen:

$$\frac{\sin 2\varphi}{4\cos^4\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)} = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

Der Zähler läßt sich auf denselben Winkel bringen, denn $\sin 2\varphi = \sin(180^0 - 2\varphi) = \sin 4\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$. Bezeichnet man daher $45^0 - \frac{\varphi}{2}$ mit ψ, so ist nun

$$\frac{\sin 4\psi}{4\cos^4\psi} = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

Es ist aber $\sin 4\psi = 4\sin\psi\cos^3\psi - 4\cos\psi\sin^3\psi$; mithin haben wir

$$\mathrm{tg}\,\psi - \mathrm{tg}^3\psi = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

woraus hervorgeht

$$\frac{\mathrm{tg}^2\psi}{\mathrm{tg}\,2\psi} = \mathrm{tg}\,\alpha$$

eine Gleichung, die sich sehr bequem durch Versuche lösen läßt. Man erhält die beiden Wurzeln, welche für die vorliegende Aufgabe die einzig möglichen Werthe für φ liefern, nämlich, wenn man, wie in der Aufgabe §. 24. Nr. 2., Zusatz 2., $\alpha = 10^0$ annimmt,

$$\psi_1 = 35^0\ 19'\ 57'' \text{ und } \psi_2 = 23^0\ 30'\ 19''$$

und dazu $\varphi_1 = 19^0\ 20'\ 6''$ und $\varphi_2 = 42^0\ 59'\ 24''$ wovon φ_1 das Maximum und φ_2 das Minimum der Kegeloberfläche bestimmt.

2. Es ist ein grader Kegel gegeben, dessen Axendreieck an der Spitze einen stumpfen Winkel 2α hat. Um Punkte, die in der Axe und ihrer Verlängerung über den Scheitel hinaus liegen, seien Kugeln beschrieben, welche den Grundkreis in seinem Mittelpunkte berühren. Wo liegen die Mittelpunkte derjenigen Kugeln, bei welchen das von dem Kegelmantel abgegrenzte Kugelsegment ein Maximum oder Minimum ist? (Vergl. §. 15. Nr. 6.)

1. Auflösung. Heißt der unbekannte Kugelradius ρ, die Höhe des zu construirenden Segmentes x und die des gegebenen Kegels h, so ist

$$\rho^2 = (h - x)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + (\rho - x)^2.$$

Den hieraus für ρ hervorgehenden Werth setze man in den Ausdruck des Segmentinhaltes ein; dann erhält man durch bekannte Umformungen die gesuchte Höhe des Maximums oder Minimums

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{1 - \operatorname{cotg}^2 \alpha}}{3 + \operatorname{cotg}^2 \alpha} \cdot h$$

was sich, da man den Nenner auch $2^2 - (1 - \operatorname{cotg}^2 \alpha)$ schreiben kann, noch heben läßt, wodurch der Ausdruck

$$x = \frac{h}{2 \mp \sqrt{1 - \operatorname{cotg}^2 \alpha}}$$

hervorgeht. Derselbe zeigt, daß α zwischen 45° und 90° liegen muß; daß also für Kegel, deren Axendreieck ein spitzwinkeliges gleichschenkeliges Dreieck ist, kein größtes oder kleinstes Kugelsegment existirt. Zur geometrischen Construction dieses Ausdrucks muß man den Bruch mit irgend einer Länge erweitern, wozu sich der Radius r der Kegelbasis eignet; man hat dann

$$x = \frac{hr}{2r \mp \sqrt{r^2 - h^2}}.$$

Verlängert man demnach in dem gegebenen Axendreieck r über den Endpunkt der Grundlinie hinaus um die leicht zu bildenden Linien $(r - \sqrt{r^2 - h^2})$ und $(r + \sqrt{r^2 - h^2})$, ver-

bindet die beiden erhaltenen Punkte mit der Spitze und zieht mit diesen Linien durch jenen Endpunkt der Grundlinie Parallelen, so schneiden sie von der Höhe des Dreiecks die Höhen der gesuchten Segmente ab. Letztere sind nun leicht zu construiren. — Denkt man Punkte, die in außerordentlich großer Entfernung in der Verlängerung der Höhe liegen, als Kugelmittelpunkte, so sind deren Segmente ganz dünne Blättchen, die sich auf dem Grundkreise des Kegels ausbreiten. Betrachtet man näher liegende Mittelpunkte, so werden die Segmente dicker, und nehmen an Inhalt zu. Fährt man in der Betrachtung so fort, dann erreicht die Höhe von den beiden ausgezeichneten Werthen zuerst x_2, nämlich

$$x_2 = \frac{hr}{2r + \sqrt{r^2 - h^2}}$$

Diese gehört also einem Maximum an. Bei Kugeln, deren Mittelpunkte von hier ab näher an die Grundfläche herantreten, nimmt das Segment augenscheinlich ab; die größere Höhe

$$x_1 = \frac{hr}{2r - \sqrt{r^2 - h^2}}$$

kommt demnach einem Minimum zu. Bei fortgesetzter Annäherung des Mittelpunktes nehmen die Segmente noch um ein Geringes zu, bis die Kugel den Kegelmantel nur noch berührt.

Höchst einfach ist die Endgleichung der trigonometrischen Lösung:

2. Auflösung. Bildet der veränderliche Kugelradius ρ mit der Höhe h, und zwar mit dem nach ihrem Fußpunkte laufenden Stücke, den Winkel φ, so wird der Inhalt des Segmentes, da $\rho = \frac{x}{1 - \cos\varphi}$ ist,

$$S = \tfrac{1}{3}\pi x^3 \frac{2 + \cos\varphi}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

oder, da sich $x = \frac{h \sin\alpha \sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right)}$ ergiebt,

$$S = \frac{1}{6}\pi h^3 \sin^3\alpha \cdot \frac{\sin\frac{\varphi}{2}(2 + \cos\varphi)}{\cos^3\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right)}.$$

Bezeichnet man zur Abkürzung $\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right)$ mit z, so hat man also

$$\sin\frac{\varphi}{2}(2 + \cos\varphi) z_1^3 = \sin\frac{\varphi_1}{2}(2 + \cos\varphi_1) z^3.$$

Nun subtrahire man von beiden Seiten $\sin\frac{\varphi}{2}(2 + \cos\varphi) z^3$ so ist

$$\sin\frac{\varphi}{2}(2 + \cos\varphi)(z_1^3 - z^3) = z^3\left[\sin\frac{\varphi_1}{2}(2 + \cos\varphi_1) - \sin\frac{\varphi}{2}(2 + \cos\varphi)\right]$$

oder

$$\sin\frac{\varphi}{2}(2+\cos\varphi)(z^2+zz_1+z_1^2)(z_1-z)+z^3\left[\tfrac{3}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\sin 3\frac{\varphi}{2}-\sin 3\frac{\varphi_1}{2}\right)\right]=0$$

verwandelt man nun $z_1 - z = \cos\left(\frac{\varphi_1}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right)$ und die übrigen Differenzen in Producte, dividirt jeden Sinus durch seinen Bogen und setzt nun $\varphi_1 = \varphi$, so hat man

$$\tfrac{3}{2}z^2\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha\right)\sin\frac{\varphi}{2}(2+\cos\varphi)+\tfrac{3}{4}z^3\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\cos 3\frac{\varphi}{2}\right)=0$$

Es kann nicht z gleich Null sein. Nach Entfernung des dreifachen Winkels hat man

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha\right)\sin\frac{\varphi}{2}(2+\cos\varphi)+\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha\right)\cos\frac{\varphi}{2}\cos\varphi=0$$

dies vereinfacht sich durch Absondern von $\cos\varphi$ in

$$2\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha\right)\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\varphi\cos\alpha=0$$

löst man endlich $\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right)$ auf, so ist

$$(1 - \cos\varphi)\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha + \cos\varphi\cos\alpha = 0$$

und damit ergiebt sich

$$\sin \varphi = \cot g\, \alpha.$$

Dieses Resultat lehrt: 1) daß für spitzwinkelige Kegel die Aufgabe unmöglich ist, und 2) daß zwei Werthe, φ und $(180^\circ - \varphi)$, ihr genügen. Ist z. B. der Winkel an der Spitze $2\alpha = 120^\circ$, so ist $\varphi_1 = 35^\circ\, 15'\, 51,''8$ und $\varphi_2 = 144^\circ\, 44'\, 8,''2$. Aber auch durch Construction kann man die Winkel finden, da man hat

$$\sin \varphi = \cot g\, \alpha = \frac{h}{r}\cdot$$

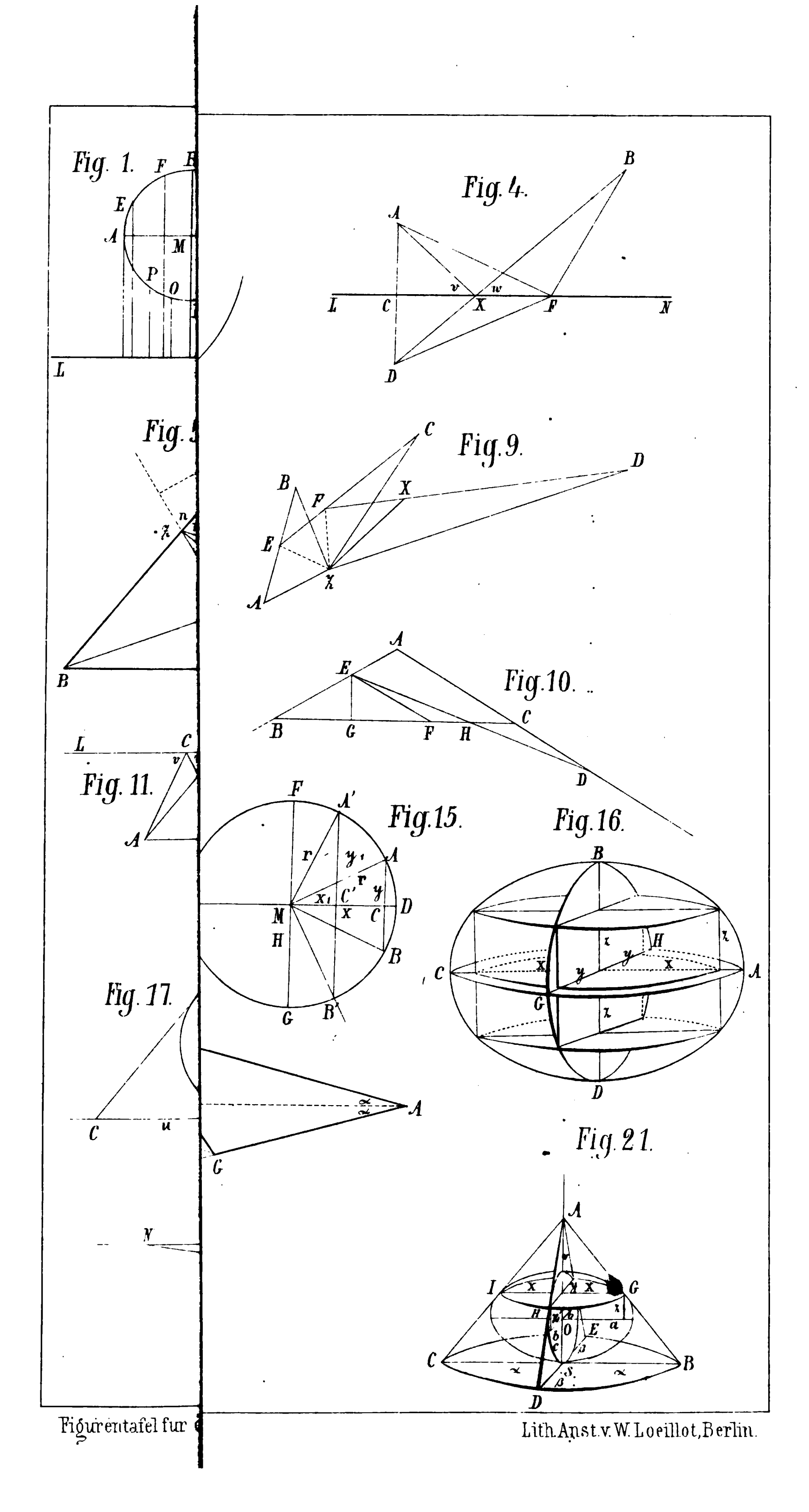
Man fälle in dem gegebenen stumpfwinkelig-gleichschenkeligen Dreiecke von der Spitze A auf die Grundlinie BC die Höhe AD, trage auf derselben von D aus $\frac{1}{2}$BD ab, DE, und beschreibe um E mit $\frac{1}{2}$BD $= \frac{1}{2}$r einen Kreis, welcher die verlängerte Höhe in F schneidet. Trägt man in diesen Kreis die Höhe DA von D aus als Sehne, DG, ein, zieht die Linie GF und verlängert sie über F hinaus, FH, so sind Winkel DFG und Winkel DFH diejenigen, welche der Gleichung

$$\sin \varphi = \frac{h}{r}$$

genügen. Auf die Halbirungslinien dieser Winkel braucht man endlich nur von D Lothe zu fällen, um in deren Durchschnittspunkten mit den Schenkeln AB und AC diejenigen Punkte zu erlangen, welche bei der Rotation des Dreiecks ABC um AD die Peripherien der Grundkreise von den gesuchten Segmenten beschreiben. Die Erzeugungskreise ihrer Kugeln sind nun sofort zu erhalten.

Daß das Segment mit der kleinen Höhe und dem spitzen Winkel φ wirklich ein Maximum, und das andere, bei dem nicht viel an einer vollständigen Kugel fehlt, ein Minimum ist, davon überzeugt man sich bald, wenn man den veränderlichen Theil des letzten Ausdruckes S für diese beiden Werthe von φ und für ein Paar ihnen nahe liegende etwa auf 3 Decimalstellen wirklich berechnet.

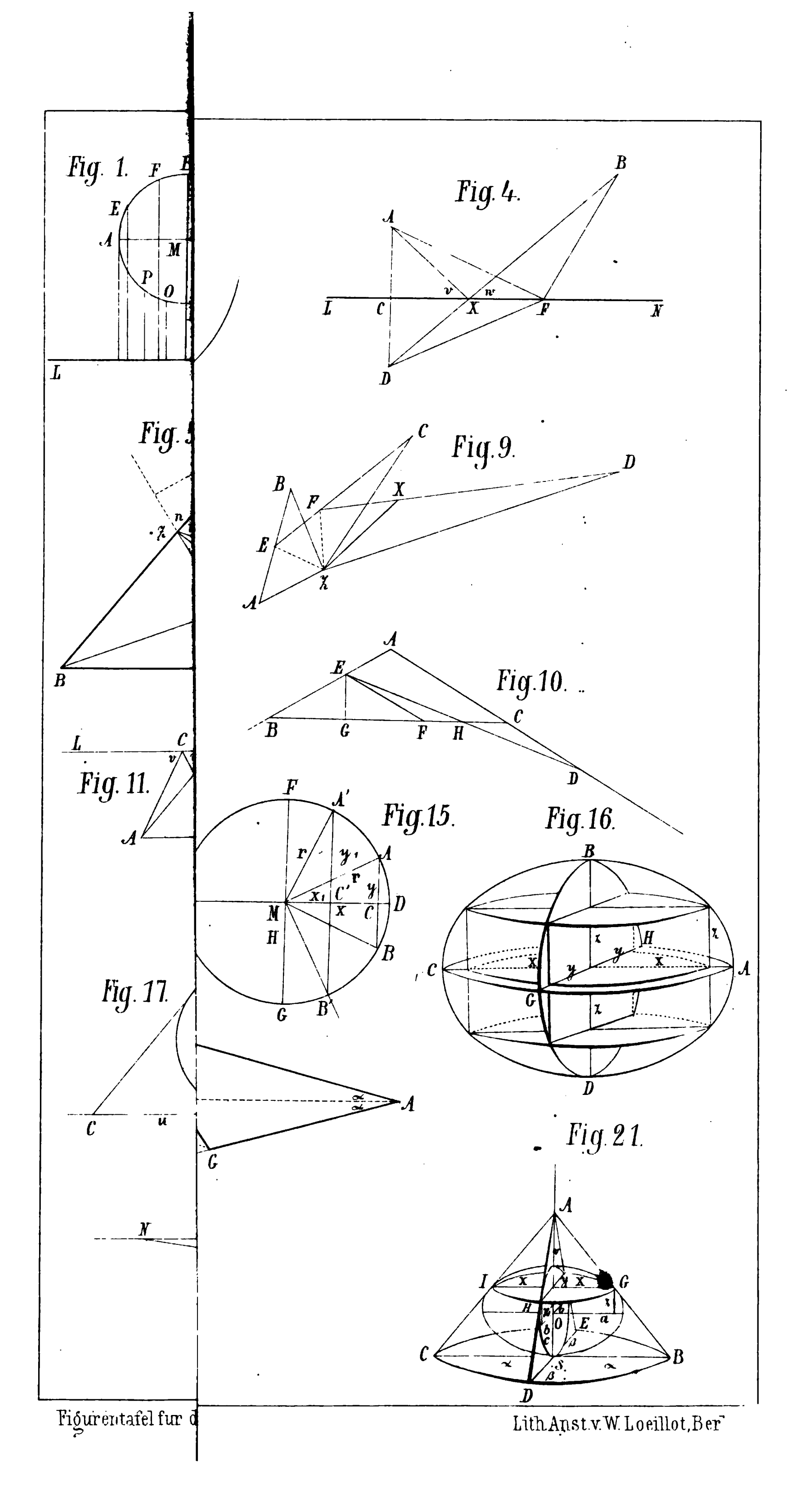
Druck von J. F. Starcke in Berlin.



Figurentafel für

Lith. Anst. v. W. Loeillot, Berlin.

Druck von J. F. Starcke in Berlin.



Figurentafel fur d

Lith. Anst. v. W. Loeillot, Ber

